Inštrumentálny realizmus ako možné východisko teoretickej reflexie vyučovania matematiky

Ladislav Kvasz

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta a Akademie věd ČR, Filosofický ústav

Abstrakt: Cieľom článku je predstaviť určitú epistemologickú pozíciu nazvanú inštrumentálny realizmus a ukázať, ako je možné ju využiť pri analýze rôznych prístupov k vyučovaniu matematiky. *Inštrumentálny realizmus* vychádza z presvedčenia, že úspešné poznávanie určitého výseku reality musí na jednej strane zohľadniť špecifický charakter výseku *reality*, ktorú poznávame, a na druhej strane musí zohľadniť epistemické *nástroje*, pomocou ktorých realitu poznávame. (Rozdiel medzi termínmi *epistemický* a *epistemologický* je podobný ako medzi psychický a psychologický. Epistemický sa týka poznávania, epistemologický sa vzťahuje k filozofickej disciplíne, ktorá poznávanie skúma.) V prípade disciplín ako fyzika, biológia či psychológia uvedené dve požiadavky pravdepodobne nie sú kontroverzné. V prípade matematiky však hovoriť o poznávanej realite a o nástrojoch, ktoré k tomu používame, už nie je úplne samozrejmé. Inštrumentálny realizmus tak otvára nový pohľad na poznávanie, ktorý, ako veríme, má celý rad dôsledkov pre vyučovanie matematiky.

Kľúčové slová: inštrumentálny realizmus, didaktika matematiky, zmeny vedeckých teórií

Instrumental Realism as a Possible Source of the Theoretical Reflection of Mathematics Education

Abstract: The aim of the paper is to present an epistemological position called instrumental realism and to show how this position can be used as a tool for the analysis of different approaches to mathematics education. *Instrumental realism* is based on the conviction that any successful study of a particular segment of reality must on the one hand take into account the specific features of the particular segment of reality that we are studying. On the other hand, it must take into account the particular epistemic tools, by means of which we approach this segment of reality. In the case of physics, biology, or psychology, these two requirements do not seem controversial. Nevertheless, in the case of mathematics to speak about mathematical reality that we study or about the instruments that we use is much less obvious. Instrumental realism thus opens a new perspective on knowledge acquisition, that, as we believe, has many important consequences for mathematics education.

Keywords: instrumental realism, mathematics education, scientific change

V epistemológii, označovanej aj ako teória poznania, stoja proti sebe dva prúdy – *realizmus*, ktorý vychádza z predpokladu, že pri poznávaní poznávame niečo skutočné, čo je od nás do veľkej miery nezávislé, a sme schopní dospieť k poznaniu tejto skutočnosti; a *konštruktivizmus*, inšpirovaný hlavne filozofiou Immanuela Kanta, ktorý

https://doi.org/10.14712/23363177.2020.8
www.orbisscholae.cz

tvrdí, že skutočnosť ako taká je nám neprístupná a čo poznávame, sú naše mentálne konštrukcie.[1] *Inštrumentálny realizmus* je realizmom v tomto epistemologickom zmysle, teda predpokladá existenciu skutočnosti, ktorá je od nás nezávislá a ktorú poznávame.[2] Od jednoduchého, priamočiareho realizmu sa však odlišuje tézou, že skutočnosť nám nie je daná bezprostredne, ale je prístupná iba sprostredkovane, pomocou nástrojov (vedeckých inštrumentov).

Inštrumentálny realizmus by som rád podrobnejšie predstavil v tomto článku. Jeho použitie pri riešení otázok filozofie matematiky som predviedol v knihe *Inštrumentálny realizmus* (Kvasz, 2015a). Kniha získala určitú odozvu aj medzi pedagógmi (Rusek, Slavík, & Najvar, 2016; Slavík, 2017; Jirotková, 2017; Rodová & Slavík, 2018; Kohout et al., 2019). To ma podnietilo pokúsiť sa inštrumentálny realizmus predstaviť spôsobom, zohľadňujúcim záujmy a potreby pedagógov. Kniha (Kvasz, 2015a) vstupovala do filozofických diskusií, ktoré sú z pedagogického hľadiska vedľajšie a prezentovala z inštrumentálneho realizmu iba torzo, ktoré bolo z pohľadu týchto diskusií relevantné. Časti inštrumentálneho realizmu som publikoval vo viacerých štúdiách a knihách, z ktorých nie je ľahké zhromaždiť relevantné fragmenty a poskladať ich do zrozumiteľného celku. Práve o to sa chcem pokúsiť v tejto štúdii. V nasledujúcom texte budem preto často odkazovať na vlastné práce (častejšie, než je v bežnej štúdii únosné), aby som upozornil, kde možno nájsť určitú ideu podrobnejšie vysvetlenú a zasadenú do kontextu odbornej literatúry. V tejto štúdii sa budem výkladu detailov ako aj odkazom na odbornú literatúru skôr vyhýbať, aby bola prezentácia inštrumentálneho realizmu čo najkompaktnejšia a aby čitateľ čo najľahšie pochopil previazanosť jeho jednotlivých častí. Oboje, zdôvodnenie i kontext, môžu záujemcovia nájsť v uvedených prácach.

1 Východiská inštrumentálneho realizmu

Inštrumentálny realizmus je omnoho širšia teória, než ako ho prezentuje kniha (Kvasz, 2015a). Vyrástol z kritiky sociologickej teórie vedeckých revolúcií, ktorú Thomas S. Kuhn predložil v knihe *Štruktúra vedeckých revolúcií* (Kuhn, 1982). Domnievam sa, že Kuhn vo svojej teórii zmiešal štyri kognitívne veľmi rozdielne typy zmien a výsledná sociologická teória je dôsledkom tohto zmiešania. Môžeme si to predstaviť, ako keď na seba premietneme fotografie štyroch tvárí. Čo na výslednom obraze ostane, budú robustné črty, spoločné všetkým tváram, teda tmavé škvrny v oblasti očí a úst, svetlejšia plocha v oblasti čela a líc a celkový oválny tvar hlavy.

[1] Je dôležité nestotožniť epistemologický konštruktivizmus s didaktickým konštruktivizmom. Epistemologický konštruktivizmus je o tom, či je možné poznať svet, didaktický konštruktivizmus je o tom, akým spôsobom si poznanie osvojujú deti. Autor tohto článku je epistemologický realista, ale pedagogický konštruktivista.

[2] Podobne si nesmieme pomýliť termín inštrumentálny, ktorý je súčasťou spojenia inštrumentálny realizmus, s inštrumentalizmom, ako sa nazýva jedna antirealistická pozícia. Podľa nej vedecké teórie nie sú opisy skutočnosti, ale sú to iba nástroje na predpovedanie javov. Teórie nie sú pravdivé či nepravdivé, ale vhodné, ak umožňujú robiť predpovede s požadovanou presnosťou, a nevhodné, ak toho schopné nie sú.

Detaily charakteristické pre jednotlivé tváre sa stratia. A presne to sa stalo Kuhnovi. Zmiešaním štyroch rôznych druhov kognitívnych dynamík stratil všetky detaily, ktoré sú charakteristické pre ten ktorý druh, a čo ostalo, je robustná štruktúra spoločná všetkým štyrom druhom, t. j. proces adaptácie vedeckého spoločenstva na zmenu. A tento proces opisuje Kuhnova teória. Prvá vec, ktorú musíme urobiť pred skúmaním procesu poznávania, je od seba oddeliť štyri druhy zmien. To je *prvý krok* na ceste k inštrumentálnemu realizmu.

1.1 Klasifikácia vedeckých revolúcií

V knihe *O revolúciách vo vede a ruptúrach v jazyku vedy* (Kvasz, 1998a) som sa pokúsil ukázať, že existujú štyri rôzne druhy zmien vo vede, alebo v Kuhnovej terminológii štyri rôzne druhy vedeckých revolúcií, ktoré nazývam idealizácia, re-prezentácia, objektácia a re-formulácia. Problematike klasifikácie vedeckých revolúcií sú venované práce (Kvasz, 1998a, 1999, 2012a, 2013a, 2014b). Predbežný, intuitívny obraz tejto klasifikácie je nasledovný.

Všetko poznanie *pramení* z nášho bezprostredného zmyslového kontaktu so skutočnosťou, takže inštrumentálny realizmus sa hlási k empirizmu, pojatému dostatočne široko.[3] Tento kontakt nás často poučuje, že veci sa majú inak, než sme si mysleli. Na jazyku vedy sa výsledok takéhoto kontaktu prejavuje v podobe *re-formulácií*.[4] Re-formuláciou rozumieme minimálnu zmenu poznania. Príkladom re-formulácie, ktorú explicitne uvádza Kuhn ako vedeckú revolúciu, bol objav planéty Urán. Bola to nevratná zmena jazyka vedy, lebo po tomto objave už správna odpoveď na otázku, koľko je planét, vyzerá inak, ako pred týmto objavom. Re-formulácie sa na jazyku vedy prejavujú zavedením nového termínu (pre planétu Urán), ktoré však nevyžaduje zmenu pojmovej štruktúry, lebo astronómia poznala v tej dobe už šesť planét a na ich opis mala osvedčený súbor pojmov.

Priamy zmyslový kontakt s poznávanou skutočnosťou je často nestabilný. Psychológovia poznajú desiatky pokusov, ktoré to presvedčivo ilustrujú. Druhý typ zmien vo vede spočíva v tom, že sa podarí zafixovať situáciu poznávania a tým dochádza ku *stabilizácii kontaktu so skutočnosťou*. Príkladom tejto zmeny je vznik perspektívy v renesančnom maliarstve. Perspektíva sa zakladá na tom, že v priestore nehybne zafixujeme hľadisko, z ktorého je obraz konštruovaný. Síce sa nezmenil zmyslový kontakt a maliar aj naďalej maľuje to, čo vidí, a predsa môžeme z perspektivistického obrazu odčítať obrovské množstvo detailov o priestorovom usporiadaní zobrazených postáv, ktoré z gotického obrazu odčítať nemôžeme. Zmeny tohto typu nazývame *objektácie*, t. j. spredmetnenia, lebo hľadisko, z pohľadu ktorého je vytváraná reprezentácia, sa stáva bodom v priestore, premieňa sa v objekt. Zmenou tohto druhu je aj kopernikovská revolúcia. Koperník sa ako prvý začal „pozerať“ na

[3] Použili sme slovo „pramení“, čím chceme naznačiť, že poznanie sa na zmyslový kontakt neredukuje.

[4] Nevratnosťou sa re-formulácia odlišuje od obyčajných reformulácií, pri ktorých sa môžeme vrátiť späť.

slnečnú sústavu „zvonka“. V duchu si predstavil, že sa pozerá na človeka, ktorý je umiestnený na Zemi a pozoruje nočnú oblohu. Čo by taký pozorovateľ, umiestnený na rotujúcej Zemi, uvidel, je presne to, čo vidíme my, teda že sa obloha otáča. A podobne Einstein si začal predstavovať, že sa nachádza vo vlaku letiacom rýchlosťou svetla. Takéto zmeny, t. j. relativizácia hľadiska, a následná stabilizácia zmyslového kontaktu so skutočnosťou, sú z epistemologického hľadiska veľmi dôležité a zaujímavé. Je pravdepodobné, že problémy s priestorovou predstavivosťou u žiakov sú spôsobené *neschopnosťou stabilizovať* prácu s priestorovými objektmi.

Ešte radikálnejšie než objektácie sú zmeny, pri ktorých sa bezprostredný, priamy, zmyslový kontakt so skutočnosťou rozšíri, spresní a zjemní vďaka zavedeniu inštrumentov. Inštrumenty často radikálnym spôsobom zvyšujú presnosť údajov, ktoré pomocou nich získavame. Zmyslový kontakt sa tým neruší, z inštrumentu musí niekto odčítať dáta, ale otvára sa prístup k javom a rozlíšeniam, ktoré boli dovtedy často nepredstaviteľné. Nový inštrument spravidla neprichádza sám, ale v množstve variant a často prináša aj rad pomocných zariadení. Práca s inštrumentom si po čase vynúti zavedenie noriem a štandardných postupov, ako aj odlíšenie správneho spôsobu narábania s inštrumentom od spôsobu nesprávneho. Zrodí sa nová *inštrumentálna prax*, ktorá prináša súbor zmien v spôsobe poznávania skutočnosti. Nová inštrumentálna prax spravidla umožňuje zaviesť celý rad nových rozlíšení; upresňuje mnohé staršie pojmy a vynucuje si zavedenie pojmov nových. Okrem toho umožňuje odhaliť rad nových faktov a súvislostí. V tomto smere je asi najznámejším príkladom zavedenie ďalekohľadu do astronómie, vďaka ktorému došlo v priebehu roku 1610 v astronómii k väčšiemu množstvu zásadných objavov, než za celé predchádzajúce storočie. Možno povedať, že nová inštrumentálna prax zakladá nový druh *inštrumentálnej skúsenosti*. Zmeny spočívajúce vo vzniku novej inštrumentálnej praxe nazývame *re-prezentácie*, lebo menia spôsob, ako je skutočnosť sprítomňovaná. Celé regióny javov, ktoré boli prv poznávaniu neprístupné, sa stávajú súčasťou obrazu sveta. V matematike sú príkladom inštrumentálnej praxe konštrukcie pomocou kružidla a pravítka, ktoré umožňujú zásadným spôsobom zvýšiť presnosť geometrickej argumentácie, či symbolické odvodzovanie v rámci algebry, ktoré umožňuje nájsť riešenie radu problémov, ktorých riešenie si bez symbolického systému nevieme ani len predstaviť (napríklad rovnice tretieho stupňa).

Podobne, ako ku stabilizácii kontaktu so skutočnosťou dochádza pomocou fixácie situácie, v rámci ktorej poznávame skutočnosť, tak existuje aj spôsob stabilizácie novej inštrumentálnej praxe. Zmena, ktorá niečo takého prináša, nazývame *idealizácia*, a spočíva vo vytvorení nového jazyka, teda nových pravidiel jeho syntaxe a sémantiky, ktorý umožňuje svet opisovať spôsobom, ktorý je v zhode s výsledkami inštrumentálnej praxe. Idealizácia je najradikálnejšou kognitívnou zmenou a jej lepšie priblíženie necháme na neskôr.

Druhý krok na ceste k inštrumentálnemu realizmu spočíva v uvedomení si toho, že na každej zo štyroch úrovní prebieha poznávanie úplne *inak*. Re-formulácie sú lokálne zmeny terminológie, ale pre zvyšné tri druhy zmien je treba vypracovať ich teóriu. Takže druhý krok cesty k inštrumentálnemu realizmu sa rozpadá na *tri samostatné kroky*, ktorým sú venované nasledujúce tri časti state.

1.2 Objektácie a Wittgensteinova obrazová teória významu

Vypracovaniu teórie objektácií sme venovali práce (Kvasz, 1996, 1998a, s. 108–149, 1998b, 2000b, 2001a, 2005a, 2006, 2008a, s. 107–224, 2020). Teória objektácií používa prvky obrazovej teórie významu z Wittgensteinovej knihy *Tractatus Logico-Philosophicus* (Wittgenstein, 1921/1989). Wittgenstein vytvoril obrazovú teóriu významu na vysvetlenie toho, ako sa jazyk vôbec môže vzťahovať ku skutočnosti. Wittgensteinovo vysvetlenie je, že jazyk zobrazuje svet (preto *obrazová* teória významu), lebo svet a jazyk majú spoločnú *formu zobrazenia*. Hlavnou myšlienkou článku (Kvasz, 1996) bolo obrazovú teóriu významu použiť na analýzu obrázkov v matematických textoch. Ukazuje sa, že ak obrazovú teóriu významu aplikujeme na geometrické obrázky, môžeme dejiny geometrie vyložiť ako striedanie rôznych foriem zobrazenia.[5] Jednotlivé formy zobrazenia tak predstavujú rôzne spôsoby stabilizácie epistemického kontaktu so skutočnosťou.

1.3 Re-prezentácie a Fregeho chápanie symboliky

Vypracovaniu teórie re-prezentácií sú venované práce (Kvasz, 1998a, s. 58–107, 2000a, 2008a, s. 11–106). Východiskom teórie re-prezentácií je opis dejín matematiky, ktorý predložil Gottlob Frege v článku *Funkcia a pojem* (Frege, 1891/1989). V ňom Frege, jeden z tvorcov modernej logiky, rozdiely medzi aritmetikou a algebrou, respektíve medzi algebrou a kalkulom (diferenciálnym a integrálnym počtom) opisuje ako rozdiely v spôsobe vyjadrenia všeobecnosti. Stačilo Fregeho výklad doplniť o výklad vývinu geometrie a získali sme opis logickej sily jazyka matematiky. Potom sme vo Fregeho duchu opísali vývin expresívnej, integratívnej a explanatorickej sily jazyka a výklad re-prezentácií v matematike bol hotový.

1.4 Idealizácie a Husserlova teória idealizácie

Vypracovaniu teórie idealizácií sú venované texty (Kvasz, 1998a, s. 32–57, 2002, 2003, 2005b, 2012b, 2013a, 2014a, 2017) a možno povedať, že dodnes nie je hotová. Kniha *Paterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematis* (Kvasz, 2008a) je zvláštna tým, že v nej chýba prvá kapitola. Pôvodný rukopis obsahoval ako prvú kapitolu výklad idealizácie *vo fyzike*. Čitateľ si to môže overiť, keď ju porovná so slovenskou verziou (Kvasz, 1998a), ktorej rozpracovaním a doplnením vznikol text anglickej knihy. Zistí, že kniha *O revolúci*ách *vo vede a ruptúrach* v jazyku vedy obsahuje samostatnú kapitolu venovanú procesu ideali-

[5] V tomto bode ideme nad rámec Wittgensteinovho *Traktátu*, ktorý predpokladal existenciu jediného jazyka (jazyka „vôbec“) a tak v jeho rámci myšlienka vývoja jazyka nedáva zmysel. Teda teória objektácií používa prvky obrazovej teórie významu (ale súčasne ide proti jej duchu).

zácie vo fyzike (Kvasz, 1998a, s. 32–57). V roku 2008 som nedokázal opísať proces idealizácie v matematike, a preto som namiesto neho chcel aj do anglickej knihy zaradiť opis idealizácie vo fyzike. Redaktor knihy, Donald Gillies, namietal, že zaraďovať do knihy venovanej filozofii matematiky pasáž o rozsahu vyše štyridsať strán, venovanú fyzike, by mohlo odradiť prípadných čitateľov. Preto som prvú kapitolu z knihy vynechal a neskôr som ju rozšíril do podoby samostatnej knihy o idealizácii vo fyzike nazvanej *Zrod vedy ako lingvistická udalosť. Galileo, Descartes a Newton ako tvorcovia jazyka fyziky* (Kvasz, 2013a).

Práca na knihe venovanej opisu procesu idealizácie vo fyzike umožnila tomuto procesu hlbšie porozumieť, a toto porozumenie zúročiť pri analýze idealizácií v matematike. Tak vznikli dva články venované procesu idealizácie v matematike. Už aj ich názvy *Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky* (Kvasz, 2014a) a *Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky* (Kvasz, 2017) naznačujú, že ako vodítko pri analýze idealizácie v matematike slúži opis idealizácie vo fyzike.

Princípy inštrumentálneho realizmu som sa snažil aplikovať v didaktike matematiky. Tak vznikli články (Kvasz, 2008b, 2013b, 2013c, 2015b, 2016, 2018).

1.5 Inštrumentálny realizmus a iné teórie kognitívnych zmien

Samozrejme, sústredením sa na výklad inštrumentálneho realizmu nechceme tvrdiť, že neexistujú iné významné koncepcie, ktoré sa zaoberajú vzájomným vzťahom vývinu poznania v dejinách a u dieťaťa. Asi najznámejšou koncepciou tohto druhu je Piagetova genetická epistemológia, súhrnne predstavená v knihe Rolanda Garciu a Jeana Piageta *Psychogenesis and the History of Science*. Piagetova teória dodnes ovplyvňuje mnohých autorov.[6] V tejto súvislosti môžeme spomenúť práce (Posner et al., 1982; Dubinsky & Mcdonald, 2001; Hejný, 2007). Nechceme sa púšťať do kritiky renomovaných autorov ani opakovať argumenty uvedené inde (Kvasz, 2001b). Chceme iba upozorniť na jednu výhodu historického prístupu, na ktorom je založený inštrumentálny realizmus, oproti koncepciám založeným na psychológii či didaktike. Tou výhodou je časový odstup. Zmeny, ktoré skúma Piaget a vedci inšpirovaní jeho prístupom, sú zmeny v reálnom čase, pričom všetky štyri druhy zmien, od re-formulácií až po idealizácie, sa odohrávajú súčasne. Naproti tomu pri historickom prístupe, na ktorom je založená naša klasifikácia zmien vo vede, skúmame historický vývoj určitej disciplíny, ktorý sa odohrával po dobu niekoľkých tisícročí. Časový parameter umožňuje oddeliť zmeny jednotlivých druhov a vďaka tomu dokážeme izolovať jednotlivé druhy kognitívnych zmien. To prístupmi kognitívnej psychológie nie je možné dosiahnuť. Domnievame sa, že schopnosťou vidieť kognitívne javy v ich čistote je

[6] Aj jedna z mojich prvých publikácií v didaktiky matematiky (Kvasz, 1995) bola pokusom použiť Piagetovu teóriu vo vyučovaní matematiky. Po čase som si uvedomil určité nedostatky Piagetovho prístupu a svoje kritické výhrady som zhrnul v polemickej stati (Kvasz, 2001b). Koncepciu inštrumentálneho realizmu možno chápať aj ako pokus prekonať nedostatky Piagetovho prístupu.

inštrumentálny realizmus špecifický a vďaka nej môže prispieť k rozvoju ostatných prístupov, tesnejšie zviazaných s psychológiou či didaktikou.

2 Inštrumentálny realizmus a vyučovanie matematiky

Vyučovanie matematiky je možné opísať ako proces, pri ktorom sa v myslení žiaka snažíme navodiť určitý súbor kognitívnych zmien. V súlade so závermi kapitoly 1.1 budeme vychádzať z hypotézy, že *existujú štyri zásadne odlišné druhy kognitívnych zmien v matematike*. Jednotlivé druhy zmien sa od seba odlišujú mierou radikálnosti premien, ktoré v myslení žiaka vyvolávajú. Takéto premeny môžu siahať od jednoduchého upresnenia terminológie, keď sa žiak naučí rozlišovať medzi blízkymi javmi, ako kružnica a kruh,[7] obsah a obvod, či rovnosť a rovnica, až po pochopenie hlbokých matematických ideí, ako je napríklad idea duality, idea spojitosti, či idea linearity. V nasledujúcom texte sa pokúsime opísať dôsledky každého zo štyroch druhov zmien pre didaktiku matematiky.

Aby sme štyri druhy kognitívnych zmien v matematike mohli ľahšie odlíšiť, siahneme po príkladoch z histórie matematiky, na ktorých sú príslušné zmeny dostatočne jasne rozpoznateľné. Ako východisko vezmeme Euklidove *Základy*, čo je jeden z najvýznamnejších matematických textov všetkých čias. Každý zo štyroch druhov kognitívnych zmien sa pokúsime ilustrovať tým, že Euklidov text dáme do kontrastu s ďalším textom, ktorý sa od *Základov* odlišuje práve zmenou daného druhu.

Idealizácia je zmena, oddeľujúca matematiku antického Grécka zameranú na dokazovanie tvrdení na základe definícií, postulátov a axióm, od viac menej empirickej matematiky starovekého Egypta a Mezopotámie, ktoré dôkaz nepoznali. Preto hovoríme, že matematika starovekého Egypta a Mezopotámie neprešla procesom idealizácie. Ako ilustráciu prvého druhu kognitívnych zmien preto možno vziať protiklad *Euklidove* Základy *verzus* Rhindov papyrus.

Druhý druh zmien nazývame ***re-prezentácia***.[8] Je to zmena oddeľujúca euklidovskú syntetickú geometriu od karteziánskej analytickej geometrie a hausdorffovskej fraktálnej geometrie. Prechod od syntetickej geometrie k analytickej geometrii spočíval v zmene spôsobu, ako reprezentujeme tvar, akým spôsobom vytvárame reprezentácie geometrických objektov. Ako ilustráciu druhého druhu kognitívnych zmien možno vziať protiklad *Euklidove* Základy *verzus Descartova* La Géometrie.

Tretí druh zmien nazývame ***objektácia***.[9] Tento druh zmien ilustruje línia od Euklidových *Základov*, cez Desarguovu projektívnu geometriu, Bolyai-Lobačevského neeuklidovskú geometriu, Beltramiho model, až po Kleinov *Erlangenský program*. Za

[7] Je zaujímavé, že Euklides medzi kružnicou a kruhom terminologicky nerozlišoval – oboje označoval slovom *kyklos*. Z kontextu bolo jasné, čo mal na mysli. Je preto otázne, či presnou terminológiou žiakov nemätieme, resp. či nerámujeme obraz, ktorý ešte nie je namaľovaný.

[8] V knihe *Patterns of Change* je termín re-prezentácia preložený ako *re-coding*, pozri s. 11–84.

[9] V knihe *Patterns of Change* je termín objektácia preložený ako *relativisation*, pozri s. 107–159.

ilustráciu tretieho druhu kognitívnych zmien možno preto vziať *Euklidove* Základy *verzus Lobačevského* O základoch geometrie.

Posledný druh zmien tvoria ***re-formulácie***. Je to druh zmien, pri ktorých sa mení (a spresňuje) slovník, v ktorom sú poznatky formulované. Z množstva príkladov re-formulácií uvedieme iba jeden, spojený s menom Johna Playfaira. Playfair bol vydavateľom Euklidových *Základov* v 18. storočí, ktorý dal piatemu postulátu podobu používanú dodnes. Ako kontrast ilustrujúci štvrtý druh kognitívnych zmien možno vziať protiklad *Euklidove* Základy *verzus Playfairovo vydanie* Základov.

Musíme si uvedomiť, že v histórii prebiehajú tieto štyri druhy zmien súčasne a sú rôzne prepletené. To isté platí aj o navodzovaní týchto zmien v mysli žiaka. Ale napriek tomu už aj uvedený prehľad stačí na to, aby sme si uvedomili, že je niečo zásadne odlišné žiakov naučiť analytickú geometriu (t. j. dosiahnuť, aby v ich mysli prebehla určitá re-prezentácia), ako snažiť sa priviesť ich k pochopeniu toho, čo je to dôkaz (t. j. dosiahnuť, aby v ich mysli došlo k idealizácii tvaru).

2.1 Idealizácia z pohľadu didaktiky matematiky

Väčšina matematikov, rovnako ako didaktikov matematiky úspešne prešla procesom idealizácie ešte v detstve a preto si *proces idealizácie vôbec neuvedomuje* – ideálny charakter matematických objektov je pre nich samozrejmosťou. Mnohí z nich majú dojem, že ideálne objekty matematiky, ako sú čísla, geometrické tvary či algebraické štruktúry, sa nachádzajú priamo v realite. Ak určitý predmet má tvar, tak ho má v matematickom zmysle tohto slova – ako dokonalú geometrickú formu. Cieľ vyučovania matematiky vidia v tom žiakov naučiť tieto tvary pomenovať a poznať ich vlastnosti. Neuvedomujú si, že najradikálnejšou kognitívnou zmenou, ktorou dieťa pri učení sa matematike musí prejsť, je naučiť sa tieto tvary kognitívne vyčleniť a stabilizovať.[10] Táto zmena je námetom Platónovho podobenstva o jaskyni.[11] Dieťa musí opustiť jaskyňu tieňov a naučiť sa vidieť skutočné matematické predmety.

Edmund Husserl v jednom zo svojich posledných textov, vydanom až posmrtne s názvom *Otázka o pôvode geometrie ako intencionálne-historický problém* (Husserl, 1939) upozorňoval na nesamozrejmosť idealizácie. Význam idealizácie pre porozumenie matematiky opísal Petr Vopěnka v knihe *Rozpravy s geometrií*. Idealizáciu vyložil, v priamej nadväznosti na Husserlov text, ako *schopnosť za reálnymi útvarmi uvidieť ideálne geometrické objekty*. Vopěnka to opisuje slovami:

> Geometer má pred sebou list papiera pokreslený čiarami rozmanitých tvarov, rovnými aj krivými, navzájom poprepletanými a pretínajúcimi sa v rôznych bodoch. Jeho zrak

[10] Keď tu tvrdím, že mnoho matematikov a didaktikov matematiky si proces idealizácie neuvedomuje, rovnako ako keď budem tvrdiť, že si neuvedomujú proces re-prezentácie, nemám na mysli všetkých matematikov. Verím, že existuje početná skupina matematikov, ktorí sa nad dejinami a didaktikou svojho oboru zamýšľajú. Ale súčasný stav vyučovania matematiky naznačuje, že hlas tejto skupiny nie je vo vyučovaní rozhodujúci.

[11] Jaskyňa znázorňuje kognitívny svet predgréckej matematiky.

> spočinul na obrázku, jeho pohľad však prenikol cez obrázok, von z reálneho sveta do sveta geometrického. Tak napríklad za rovnou čiarou uvidel geometrickú úsečku, uvidel ju v jej úplnej čistote a spolu s ňou uvidel dokonalú priamosť. Od okamihu tohto prehliadnutia je pre neho navždy úsečka úsečkou geometrickou, a nie čiarou narysovanou podľa pravítka.
> Boli doby, kedy sme geometrický svet nepoznali. Deti, ktoré sa geometriu zatiaľ neučili, ho nepoznajú. Učiteľ im tento svet otvorí. Jeho úloha je zdanlivo nesplniteľná, lebo tento svet nemôže ani ukázať, ani nenájde dostatok slov, ktorými by ho popísal. Môže ho iba rôzne navodzovať, napríklad narysovať čiary pomocou pravítka a kružidla a povedať, že sa úsečkám a kružniciam podobajú, avšak ukázať na nich môže len to, čím sa im nepodobajú. Do geometrického sveta môžeme niekoho viesť len na kus cesty, môžeme ho priviesť len pred jeho bránu, rozhodujúci krok však musí urobiť každý sám. (Vopěnka, 2003, s. 23, preklad z češtiny L. K.)

Najdôležitejšou úlohou učiteľa pri vyučovaní matematiky je úloha, o ktorej píše Vopěnka.[12] Otvorenie sa geometrického sveta je idealizácia, a z kognitívneho hľadiska spočíva vo vytvorení epistemického prístupu k ideálnym geometrickým objektom. Je pozoruhodné, že v didakticko-matematickej literatúre sa proces idealizácie prakticky nespomína a zdá sa, že väčšina didaktikov matematiky si proces idealizácie ani neuvedomuje.[13] Aby sme proces idealizácie pochopili, obrátime sa do histórie.

2.1.1 Idealizácia vo fyzike

Ako sme uviedli, kniha *Patterns of Change* výklad procesu idealizácie neobsahuje. Idealizácia sa v matematike odohrala medzi Thalétom (6. storočie p. n. l.) a Euklidom (3. storočie p. n. l.), teda v období, z ktorého takmer úplne chýbajú pôvodné pramene. Preto keď chceme porozumieť procesu idealizácie v matematike, nemáme inú možnosť, než obrátiť sa k fyzike a následne matematický spôsob idealizácie rekonštruovať na základe jeho paralely s fyzikálnym spôsobom idealizácie. Preto najprv na príklade fyziky opíšeme štádiá procesu idealizácie, a potom sa vrátime k matematike. Pomocou pojmov, ktoré zavedieme pri výklade idealizácie vo fyzike, budeme schopní opísať základné etapy procesu idealizácie v matematike. V procese idealizácie vo fyzike je možné vyčleniť tri etapy.

Prvú etapu tvorí galileovská fyzika, ktorá je z epistemologického hľadiska pozoruhodná tým, že opisuje vždy iba pohyb jediného izolovaného telesa. Či už je to voľný pád, šikmý vrh, pohyb po naklonenej rovine alebo pohyb kyvadla, čo sú hlavné príklady systémov skúmaných Galileom, pohybuje sa vždy iba jedno teleso. Galileo akoby nebol schopný opísať pohyb fyzikálneho systému zloženého z niekoľkých telies. Túto skutočnosť možno vyjadriť slovami, že galileovskej fyzike *chýba skladobná syntéza* (nie je schopná spájať telesá do fyzikálnych systémov). Podobne nikde v galileovskej fyzike nenájdeme opis interakcie medzi telesami, t. j. opis následkov pôsobenia jedného telesa na druhé. Preto galileovskej fyzike *chýba deduktívna syntéza*. Absen-

---

[12] Husserl didaktický rozmer idealizácie nespomína, a v ňom tak možno vidieť jeden z Vopěnkových postrehov.

[13] Samozrejme tým nemyslíme, že by mali poznať *teóriu* idealizácie – či už našu alebo hocakú inú. Idealizácia je však objektívne existujúca zmena a je prekvapujúce, ako málo didaktikov si túto zmenu uvedomuje, či už v histórii vedy alebo v psychike detí.

cia skladobnej a deduktívnej syntézy je najzaujímavejšou epistemologickou črtou galileovskej fyziky. (Podrobne Kvasz, 2013a, s. 65–70.)

Druhú etapu procesu idealizácie vo fyzike predstavuje karteziánska fyzika. Descartes na rozdiel od Galilea udelil opisu interakcie medzi telesami centrálnu úlohu vo fyzikálnom obraze sveta. Na opis interakcie zaviedol základný model – model zrážky dvoch telies, podľa ktorého sú všetky interakcie kontaktné a spočívajú v zrážke interagujúcich telies. Na opis kontaktných interakcií Descartes formuloval sériu pravidiel, ktorými sa interakcie riadia. Možno preto povedať, že Descartes prekonal základné nedostatky galileovskej fyziky – absenciu skladobnej a deduktívnej syntézy. Skladobná a deduktívna syntéza je však do karteziánskej fyziky zavedená pomocou konkrétneho modelu – pomocou modelu zrážky. Descartova fyzika tak predstavuje systém, v ktorom jeden konkrétny spôsob zjednotenia súboru telies do fyzikálneho systému a jeden konkrétny spôsob opisu interakcie medzi telesami bol prehlásený za univerzálny mechanizmus skladby a pôsobenia. Toto použitie konkrétneho modelu skladobnej a deduktívnej syntézy je pozoruhodnou kognitívnou črtou karteziánskej fyziky. (Podrobne Kvasz, 2013a, s. 106–123.)

Tretiu etapu procesu idealizácie vo fyzike predstavuje newtonovská fyzika. Newton nahradil Descartov opis kontaktnej interakcie telies pomocou modelu zrážky abstraktným opisom interakcie pomocou pôsobenia síl. Zrážka je špeciálnym prípadom interakcie pomocou pôsobenia síl, pri ktorom pôsobiace sily sú silami pevnosti a pružnosti materiálu. Možno preto povedať, že Newton oddelil skladobnú a deduktívnu syntézu od konkrétnych modelov, pomocou ktorých ich zaviedol Descartes. (Podrobne Kvasz, 2013a, s. 135–188).

2.1.2 Idealizácia v matematike

Teóriu idealizácie vo fyzike chceme použiť pri analýze procesu idealizácie v matematike. Výsledkom je zatiaľ dvojica článkov *Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky* (Kvasz, 2014a) a *Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky* (Kvasz, 2017). Z ich nadpisov vidieť, že sa skutočne pokúšame preniesť výklad idealizácie z fyziky na matematiku.

Thalétovská geometria vykazuje pozoruhodný stupeň podobnosti s galileovskou fyzikou. Je užitočné pozrieť sa na zoznam tvrdení, ktoré tradícia pripisuje Thalétovi.[14] Nie je ťažké si všimnúť, že podobne ako boli jednoduché (t. j. nezložené) fyzikálne systémy, ktoré skúmal Galileo, aj Thalés opisoval iba jednoduché geometrické situácie. U Thaléta sa nestretneme s tým, čo bude základnou črtou euklidovskej geometrie – s geometrickou konštrukciou. Vety pripisované Thalétovi sa týkajú jednoduchých útvarov. Keď konštrukciu pomocou pravítka a kružidla pochopíme ako skladobnú syntézu euklidovskej geometrie, tak môžeme povedať, že

[14] *T1*: Priemer delí kruh na dve rovnaké časti. *T2*: Oproti zhodným stranám ležia v trojuholníku zhodné uhly. *T3*: Vrcholové uhly sú zhodné. *T4*: Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom, sú zhodné. *T5*: Určenie výšky pyramídy zmeraním dĺžky jej tieňa vtedy, keď má predmet rovnakú dĺžku ako jeho tieň. *T6*: Každý uhol nad priemerom je pravý. (Podrobnosti Kvasz, 2014a.)

Thalétovej geometrii chýbala skladobná syntéza. Podobne, keď sa zamyslíme nad tým, ako asi Thalés svoje tvrdenia dokazoval, nie je ťažké si uvedomiť, že uvažované tvrdenia sa zakladajú na určitej symetrii. Keď si túto symetriu uvedomíme, môžeme bezprostredne nahliadnuť pravdivosť tvrdenia. Možno preto povedať, že vety pripisované Thalétovi majú „jednokrokové" dôkazy – pozrieme sa na obrázok, uvedomíme si jeho symetriu a nahliadneme pravdivosť vety. To ale znamená, že Thalétovej geometrii chýba deduktívna syntéza – teda reťazenie argumentačných krokov dôkazu, ktoré sa opiera o explicitne sformulované axiómy.

Možno preto povedať, že Galileova fyzika a Thalétova geometria sa vyznačujú absenciou skladobnej syntézy (schopnosti opísať fyzikálne systémy zložené z viacerých telies resp. geometrické útvary zložené z viacerých prvkov) a absenciou deduktívnej syntézy (schopnosti fyzikálne resp. geometrické fakty radiť do reťazcov deduktívnych vzťahov). Galileova fyzika nebola schopná opísať, ako pôsobenie jedného telesa ovplyvní pohyb iného, rovnako ako Thalétova geometria nevedela opísať, ako sa vlastnosti jednej časti geometrickej konfigurácie odrazia na vlastnostiach inej.

Tak ako existuje epistemologická paralela medzi Galileovou fyzikou a Thalétovou geometriou, existuje podobná analógia medzi karteziánskou fyzikou a pythagorejskou matematikou. Pythagorejskú matematiku možno považovať za odpoveď na hlavné nedostatky Thalétovej geometrie, podobne ako sme karteziánsku fyziku vyložili ako odpoveď na základné kognitívne nedostatky galileovskej fyziky (t. j. na absenciu skladobnej a deduktívnej syntézy). Pythagorejcom sa podarilo do matematiky zaviesť skladobnú a deduktívnu syntézu pomocou čísel. Čísla a ich pomery umožňujú dať rôzne geometrické útvary do vzájomných vzťahov a výpočet opierajúci sa o číselné pomery umožňuje spájať jednotlivé matematické propozície do reťazca deduktívnej argumentácie. Ale ako sa ukázalo, pythagorejská matematika stála na vratkých základoch a stroskotala na objave nesúmerateľnosti.

Články (Kvasz, 2014a, 2017) obsahujú rekonštrukciu prvých dvoch etáp procesu idealizácie v matematike. Ešte nás čaká rekonštrukcia tretej, euklidovskej etapy. Ale už aj tak vidíme, že základnou zmenou, ktorú proces idealizácie vnáša do matematiky, je zavedenie skladobnej a deduktívnej syntézy. Preto už aj predbežná a neúplná rekonštrukcia procesu idealizácie v matematike umožňuje jasnejšie porozumieť niektorým problémom didaktiky matematiky, a predovšetkým naznačuje cestu, po ktorej môže žiak vstúpiť do geometrického sveta, o ktorom píše Vopěnka.

2.2 Re-prezentácie z pohľadu didaktiky matematiky

Matematika existovala v minulosti vo veľmi odlišných podobách. Napríklad v algebre sa po dobu šesťsto rokov nepoužívali symboly a algebraické úpravy mali podobu úprav súvetí bežného jazyka. Historici toto štádium vývinu algebry nazývajú *rétorická algebra*. Po rétorickej algebre nastúpilo asi dvesto ročné obdobie *synkopickej algebry*, kedy sa pre termíny, označujúce rôzne mocniny neznámej a operácie s nimi, zaviedli skratky tvorené prvými písmenami zodpovedajúceho slova latinského jazyka. Nakoniec okolo roku 1590 sa zrodila algebra ako ju poznáme dnes – *symbolická* *algebra*. Ani tento typ zmien si matematici často neuvedomujú a algebraické objekty stotožňujú s ich symbolickou reprezentáciou. Pre dnešného matematika je algebraický vzťah takmer automaticky symbolickým vzťahom. Medzi jeho verbálnou a symbolickou formuláciou nevidí zásadný rozdiel – symbolický zápis je o niečo stručnejší a presnejší než verbálna formulácia, ale hovorí to isté.

Každý žiak žije kognitívne v určitom matematickom univerze – pozná jeho určité typické objekty, niekoľko nevšedných a prípadne záhadných objektov. Okrem univerza geometrických útvarov patrí do matematického univerza aj svet aritmetických objektov (z ktorých napríklad číslo π niektorých žiakov do tej miery fascinuje, že sú schopní naučiť sa spamäti aj sto jeho cifier) a svet symbolických objektov (ako sú rovnice, polynómy a pod.). Preto druhá úloha, ktorá stojí pred učiteľom matematiky po tom, ako sa žiakovi podarilo mentálne vstúpiť do sveta ideálnych objektov, je žiaka previesť z univerza syntetickej geometrie do univerza analytických kriviek, rovnako ako ho previesť z aritmetického univerza čísel do symbolického univerza algebry.

Z pohľadu kognitívnej vedy nevieme, ako prechod z jedného univerza ideálnych objektov do druhého takéhoto univerza vyzerá. Nevieme, ako vyzerá kognitívny svet žiaka, ktorý sa nachádza niekde na pól ceste medzi univerzom euklidovskej syntetickej geometrie a univerzom kartézskej analytickej geometrie. Spočiatku asi ku starému univerzu pridá niekoľko nových objektov, ale nakoniec sa musí novým objektom prispôsobiť celá kognitívna sieť. Pokusom opísať tento proces prostriedkami kognitívnej vedy je kniha Paula Thagarda *Conceptual Revolutions* (Thagard, 1992). Tu niet miesta na opis procesu re-prezentácií v dejinách matematiky (pozri Kvasz, 2008a, s. 11–105). Obmedzíme sa na opis vzniku jedinej re-prezentácie – na vznik symbolickej algebry.

2.2.1 Vznik symbolickej algebry ako príklad re-prezentácie

Mnohí matematici ani didaktici matematiky si neuvedomujú zdĺhavý proces, ktorý viedol ku vzniku určitej reprezentácie.[15] Jednotlivé matematické javy, objekty a vzťahy chápu tak, ako ich opisujeme pomocou dnešného, plne rozvinutého matematického jazyka. Výuka matematiky založená na používaní jej súčasného jazyka však neumožňuje žiakom *prejsť procesom re-prezentácie*, ktorý viedol ku vzniku tohto jazyka. Žiaci si tak nemôžu uvedomiť, čo je na danej reprezentácii konvenciou, teda vecou dohovoru, a čo je faktom, teda skutočnosťou od ľudských konvencií nezávislou. Aby sme si uvedomili komplexnosť zmien ktoré re-prezentáciu sprevádzajú, opíšeme cestu, ktorú prešla algebra, kým vznikla dnešná symbolika.

[15] Re–prezentáciou (písanou s pomlčkou) rozumieme proces zmeny, kým reprezentáciou (bez pomlčky) rozumieme výsledok tohto procesu. Teda príkladom reprezentácie je jeden zo systémov geometrie: syntetická, analytická či fraktálna; re–prezentáciou je napríklad prechod od syntetickej geometrie k analytickej.

A) Rétorická algebra (800–1600)[16]

Historici matematiky kladú vznik algebry ako samostatnej disciplíny do deviateho storočia a spájajú ho s arabským matematikom Muhammadom Al-Chwárizmím. Al-Chwárizmí v *Krátkej knihe o počte algebry a al-muqábaly* (Al-Chwárizmí, po 800/1983), prv ako sa pustil do riešenia určitej úlohy, jej „rovnicu" previedol na tvar, v ktorom boli iba kladné koeficienty a pri najvyššej mocnine bola jednotka.[17] Aby dosiahol túto formu, používal tri operácie: *al-džabr* – ak na jednej strane vystupujú členy, ktoré treba ubrať, tak sa k obom stranám pripočíta zodpovedajúca hodnota; *al-muqábala* – ak vystupujú na oboch stranách rovnaké mocniny, odčíta sa menší člen na jednej strane od väčšieho na druhej; *al-rad* – ak je koeficient pri najvyššej mocnine rôzny od jednotky, tak sa ním vydelí celá „rovnica". Názov al-džabr v názve knihy sa začal používať na označenie náuky o rovniciach.

Al-Chwárizmího postup si ukážeme na úprave, ktorá *v našej symbolike* vyzerá nasledovne:

$$21\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6}x^2 = 100 + 2x^2 - 20x \quad \text{al-džabr}$$

$$100 + 4\frac{1}{6}x^2 = 41\frac{2}{3}x.$$

Al-Chwárizmí píše:

> ... to bude dvadsať jedna vecí a dve tretiny veci bez dvoch majetkov a jednej šestiny, rovné sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí. „Al-džabruj to", a pridaj dva majetky a jednu šestinu k sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí, a pridaj tých od sta a dvoch majetkov ubratých dvadsať vecí k dvadsať jednej veci a dvom tretinám veci. Tak si dostal sto a štyri majetky a šestinu majetku rovné štyridsať jednej veci a dvom tretinám veci.

Na tomto postupe je pozoruhodný *verbálny spôsob zápisu „rovníc"* – „rovnica" je rozsiahla veta arabského jazyka. Al-Chwárizmí síce nepoužíva symboliku, ale napriek tomu „rovnice" upravuje a rieši. Používa pritom príkazy ako „al-džabruj to", t. j. operácie, ktorých predmetom nie sú čísla, ale „algebraické termy".[18]

Aby nevznikol dojem, že výsledky, ktoré možno dosiahnuť prostriedkami rétorickej algebry, sú triviálne, uvedieme riešenie rovnice tretieho stupňa z Cardanovej

[16] Ako rétorickú by bolo možné označiť aj veľkú časť matematiky starého Egypta a Mezopotámie (s výnimkou tabuliek a čisto numerických fragmentov). Algebra sa však vyznačuje tým, že v jej rámci sa manipuluje (počíta, upravuje) aj s niečím iným než s číslami. Typickým príkladom je operácia *al-džabr*, ktorá zodpovedá nášmu preneseniu výrazu na druhú stranu rovnice. Tu sa manipuluje s termom algebraického jazyka a nie s číselným výrazom. Preto vznik rétorickej *algebry* je vhodné klásť na začiatok deviateho storočia.

[17] Slovo rovnica dávame do úvodzoviek, lebo Al-Chwárizmí nepoužíval symboly a algebraický vzťah, ktorý riešil, zapisoval vetou arabského jazyka obohateného o niekoľko technických termínov.

[18] Keď sme úryvok Al-Chwárizmího textu prepísali do našej symboliky, vidíme tiež, že pri úprave „prehodil strany rovnice". V prvom súvetí stojí slovo sto (tj. absolútny člen rovnice) za slovom *rovné*, v poslednom stojí pred týmto slovom.

 knihy *Ars Magna sive de regulis algebracis* (Cardano, 1545/1968). Rovnicu Cardano zapisuje: „De cubo et rebus aequalibus numero“ (tretia mocnina a veci sa rovnajú číslu). Jej riešenie uvádza v tvare pravidla:

> Umocni na tretiu jednu tretinu počtu vecí, pridaj k tomu štvorec polovice čísla rovnice a vypočítaj druhú odmocninu z tohto celku. Toto zduplikuj, a k jednej z dvoch pridaj polovicu čísla rovnice a od druhej odčítaj polovicu toho istého. Potom budeš mať binomium a jeho apotome. Potom odčítaj tretiu odmocninu apotome od tretej odmocniny binomia, zvyšok, ktorý ostane, je vec (Cardano 1545/1968, s. 98).

Teda žiaden vzorec, žiadna formula, ale pravidlo (t. j. *regula*), tak ako sľubuje názov knihy „de regulis algebracis“. Aby sme pochopili, čo Cardano robí, je užitočné jeho verbálny text prepísať do dnešnej symboliky, čím dostaneme tzv. Cardanov vzorec (Cardano takýto vzorec nikdy nenapísal):

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}\ . \tag{1}$$

Vidíme, že rétorická algebra rozhodne nebolo krátke či nezaujímavé obdobie dejín algebry. Práve naopak, trvalo takmer osemsto rokov a obohatilo algebru o významné matematické výsledky.

B) Synkopická algebra (1400–1600)

Aj keď Cardano hlavný matematický výsledok svojej knihy – postup riešenia rovnice tretieho stupňa – vyjadril prostriedkami rétorickej algebry, nebola to rétorická algebra, ktorej prostriedkami bol tento výsledok dosiahnutý. Aspoň dve storočia pred Cardanom existovala paralelne s rétorickou algebrou, ktorá algebraické problémy zapisovala prostriedkami bežného jazyka obohateného o niekoľko technických termínov, aj *synkopická algebra*. Synkopická algebra používala systém skratiek, keď technické termíny jazyka algebry nahradzovala ich prvými písmenami.

Ako prvú ilustráciu synkopickej algebry uvedieme príklad pochádzajúci od Regiomontana. Ten roku 1463 pri zápise rovnice, ktorú by sme v dnešnej symbolike zapísali v tvare

$$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x,$$

použil prvky synkopickej algebry a príslušnú rovnicu zapísal ako:

$$250^{\mathrm{r}}\ \mathrm{ig}\ 25^{\mathrm{c}}\ \text{——}\ 2^{\mathrm{c}}\ \mathrm{et}\ 100\ \mathrm{ig}\ 20^{\mathrm{r}}.$$

Neznámu označoval písmenom *r* od latinského *res* (vec), jej druhú mocninu písmenom *c* od latinského *census* (sčítanie ľudu, odhad majetku, lebo majetok mal podobu pôdy, teda obsahu). Neznámu písal ako *horný index*, čo je princíp, ktorý používame na označenie mocniny neznámej dodnes. Dlhšia vodorovná čiara zobrazujúca rovnováhu na dvojramennej váhe znázorňuje rovnosť. Náš symbol pre rovnosť vznikol, keď sa dve ramená váhy „oddelili“ a „umiestnili“ pod seba. Používaním špeciálneho znaku pre rovnosť a používaním pravého horného indexu na označenie neznámych Regiomontanus prekračuje medze synkopickej algebry. Jeho označenie mocnín neznámej prvými písmenami slov *res* a *census* je však charakteristickým znakom synkopickej algebry.

Johannes Widmann vydal roku 1489 učebnicu *Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmanschaft* (Rýchle a pekné počítanie pre každého kupca), v ktorej sprehľadnil zápis mocnín neznámej v synkopickej algebre až po deviatu mocninu: *r* (*res* – vec); *z* (*zensus* – majetok, využívajúc nemeckú vokalizáciu); *c* (*cubus* – kocka); a pre vyššie mocniny *zz*; *rzz*; *zzz*; *czz*; *zzzz*; *czzz*. Synkopickú algebru používal aj Cardano. Pravidlo na riešenie rovnice tretieho stupňa síce vyjadril prostriedkami rétorickej algebry, pri jeho odvodení však pravdepodobne použil prostriedky synkopickej algebry.

Rozhodujúci krok odvodenia Cardanovho pravidla bol predpoklad, že riešenie je rozdielom dvoch neznámych. A práve zavedenie označenia *druhej neznámej* bolo jednou z hlavných inovácií synkopickej algebry. Používali sa na to rôzne triky: písmená označujúce mocniny prvej neznámej sa brali z latinských termínov, kým pre druhú neznámu sa používali písmená odvodené z termínov niektorého z miestnych jazykov; inokedy sa písmená označujúce mocniny prvej a druhej neznámej písali rôznou farbou, alebo sa používali veľké a malé písmená. Táto inovácia bola pre riešenie rovníc tretieho stupňa rozhodujúca (pozri Kvasz, 2008a, s. 167–172).

Cardano riešenie rovnice tretieho stupňa ilustroval na príklade rovnice $x^3 + 6x = 20$ (*cubus a šesť vecí je rovný dvadsať*). Jej riešenie zapísal prostriedkami synkopickej algebry v tvare:

RV: cub: R: 108 p: 10 m: RV: cub: R: 108 m: 10, (2)

Tu *RV*[19] je z *radix universalis* (teda odmocnina určitého výrazu na rozdiel od obyčajnej odmocniny čísla, označovanej *R*). Skratka *cub* je od *cubica*, a znamená, že *RV* je tretia odmocnina. Písmená *p* a *m* označujú v súlade s princípom synkopickej algebry operácie *plus* a *mínus*.

[19] Latinská abeceda mala pôvodne iba 21 písmen. Písmená U a V, rovnako ako I a J sa začali dôsledne rozlišovať až od 17. storočia. V 16. storočí sa *universalis* skracovalo ako V.

C) Symbolická algebra (1600–1830 n. l.)[20]

Synkopická algebra sa síce na prvý pohľad iba mierne odlišuje od rétorickej algebry, ale napriek tomu predstavovala významný technický pokrok. Jej prostriedkami bolo objavené pravidlo na riešenie rovnice tretieho stupňa. Napriek tomuto nespochybniteľnému úspechu obdobie synkopickej algebry trvalo iba 200 rokov a následne bola synkopická algebra vytlačená symbolickou algebrou. Odstránenie synkopickej algebry malo dobré dôvody.

Priame naviazanie algebraických znakov označujúcich mocniny (*r*, *z*, *c*) a operácie (*R*, *p*, *m*) na zodpovedajúce termíny (*res*, *zensus*, *cubus*, *radix*, *plus*, *mínus*) má nespochybniteľnú výhodu – príslušné znaky sa ľahko pamätajú. Táto výhoda je však vykúpená radom nedostatkov. Prvým z nich je skutočnosť, že symbolika synkopickej algebry *nedrží identitu neznámej*, čo je problém napríklad pri substitúcii. Keď za *r* dosadíme *r* + 2, tak sa automaticky zmenia hodnoty aj ostatných mocnín, ale znaky *z* a *c* to nenaznačujú. Medzi znakmi *r*, *z*, *c* neexistuje žiaden súvis, podobný tomu, ktorý na symboloch x, x^2 a x^3 ukazuje, že ak za x dosadíme $x + 2$, tak namiesto x^2 budem mať $(x + 2)^2$. Ďalší nedostatok sa týka umocňovania a odmocňovania. V synkopickej algebre medzi označením operácií umocňovania a odmocňovania nie je súvislosť, takže skladanie týchto operácií je neprehľadné. Ako tretí nedostatok synkopickej algebry môžeme uviesť nesystematické riešenie problému druhej neznámej, ktoré robí zavedenie tretej neznámej prakticky nemožným. Preto už v rámci synkopickej algebry vznikali zárodky inovácií, ktoré vyústili u Vièta a Descarta do vzniku symbolickej algebry.

Vznik symbolickej algebry budeme ilustrovať na zavedení a ustálení rôznych aspektov jediného symbolu – symbolu pre odmocninu. Odmocňovanie je, rovnako ako umocňovanie, operáciou pochádzajúcou z aritmetiky. V algebre sa z odmocniny stala základná operácia, používaná pri riešení rovníc.

Regiomontanus zaviedol okolo roku 1460 do matematiky odmocniny a vypracoval pravidlá na počítanie s nimi. *Aritmetickú operáciu* odmocňovania, t. j. kalkulatívny proces, premenil na *algebraický výraz* – odmocninu. Odmocninu označoval veľkým písmenom *R* z latinského *radix* (koreň), takže $\sqrt{8}$ písal ako *R de 8* a $\sqrt[3]{7}$ ako *R cubica de 7*. Prechod od procesu k objektu sa tak odohral už v rámci synkopickej algebry (čo je jej ďalší významný prínos).

Nicolas Chuquet používal na označenie odmocniny písmeno *R*, podobne ako Regiomontanus. Stupeň odmocniny však nevypisoval slovne, ale pomocou horného číselného indexu, takže napríklad jeho $R^2\,30$ znamenalo $\sqrt{30}$. Pozoruhodným aspektom Chuquetovej symboliky bolo, že na označenie rozsahu odmocňovania používal podčiarkovanie, takže tvrdil, že $R^2\,\underline{14\ p\ R^2 180}$ egaulx $3\ \tilde{p}\ R^2\,5$, čo v našej symbolike znamená $\sqrt{14+\sqrt{180}}=3+\sqrt{5}$. Luca Pacioli v *Summa de arithmetica* z roku 1494 naproti tomu na označenie rozsahu odmocňovania písal pred členy, ktoré chcel odmocniť, písmeno *V* od *universale* (spoločný). Teda $RV\,35\ \tilde{m}\ R\,50$ znamenalo $\sqrt{35-\sqrt{50}}$.

[20] Rok 1830 odkazuje k nástupu štrukturálnej algebry, ktorej priekopníkom bol Evariste Galois. V súčasnosti máme dočinenia s nástupom ďalšieho – kategoriálneho štádia.

Michael Stifel roku 1544 v knihe *Arithmetica integra* (Úplná aritmetika) prehodil malé *r* a veľké *R* pri značení neznámej a odmocniny. Odmocninu označoval štylizovaným písmenom *r* v tvare $\sqrt{\ }$, ktorý používame podnes. Druhú odmocninu písal ako $\sqrt{z}$, tretiu ako $\sqrt{c}$, štvrtú ako $\sqrt{zz}$.

René Descartes je tvorcom našej symboliky pre odmocniny a zaviedol ju v knihe *Geometria*, vydanej v roku 1637. Od Stifela prijal ideu vziať štylizované malé *r* ako symbol pre odmocninu. To, že o ktorú odmocninu ide, vyjadril pomocou aritmetického indexu podobne ako Chuquet. Tým sa vyprázdnilo miesto pod odmocninou, kam Stifel písal označenie stupňa (teda *z* pre druhú odmocninu či *zz* pre štvrtú), a Descartes tam mohol umiestniť *argument*, teda odmocňovaný výraz. Descartes prijíma aj Chuquetovu myšlienku, že rozsah odmocniny je vyznačený pomocou *vodorovnej* čiary (fungujúcej ako určitý druh zátvoriek). Na rozdiel od Chuqueta však použil *hornú* čiaru, čo umožnilo spojiť ju s hornou nožičkou znaku pre odmocninu *r*, a náš symbol pre odmocninu je na svete.

Na tomto stručnom prehľade[21] zmien, ktoré spoločne vytvárajú symbol pre odmocninu, je pozoruhodné, že prakticky žiaden aspekt symbolu pre odmocninu sa nezrodil v podobe, v akej bol do výsledného symbolu začlenený. Keď zdĺhavú cestu, ktorá v histórii matematiky viedla ku vzniku symbolickej algebry, porovnáme s tým, ako sa algebra vyučuje na základnej a strednej škole, môžeme si uvedomiť dve veci. V dejinách matematiky etape symbolickej algebry predchádzalo dlhé obdobie rétorickej a synkopickej algebry. Školská prax tieto *dve štádiá vynecháva* a žiakom predkladá algebru hneď v jej symbolickej podobe. Potom nás nesmie prekvapiť, že deti nevedia algebraické symboly spojiť s realitou. Druhou vecou, ktorú si môžeme uvedomiť, je skutočnosť, že aj samotné vytvorenie algebraickej symboliky bol zložitý a zdĺhavý proces. Školská prax tento proces redukuje na *zavedenie výsledného symbolu*. Je otázne, či keď žiakom ponúkneme až výsledný produkt, je vôbec možné, aby plne pochopili pravidlá, ktorými sa použitie týchto symbolov riadi.

2.3 Objektácie z pohľadu didaktiky matematiky

Objektácie – alebo spredmetnenia – sú tretím druhom kognitívnych zmien v matematike. Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, aj v prípade objektácií si ich ukážeme najprv na príklade z histórie matematiky a potom sa pozrieme aké majú miesto vo vyučovaní matematiky.

2.3.1 Objektácie v dejinách algebry

Na chvíľku sa vrátime ku Cardanovmu pravidlu pre riešenie rovnice tretieho stupňa a pozastavíme sa u dvoch termínov, ktoré Cardano použil – *binomium* a *apotome*. Binomium je $\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ a jeho apotome je $-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$. Sú to prav-

21 Podrobnejší opis týchto zmien sme kvôli tomu, aby nerušil súvislé plynutie textu, umiestnili do dodatku na konci textu.

depodobne prvé technické termíny označujúce *zložené termy jazyka algebry*. Použitie týchto termínov je dokladom kognitívnej zmeny, ktorú označujeme termínom objektácia či spredmetnenie. Cardano tu odkazuje ku dvom algebraickým výrazom. Robí to však bez použitia symboliky. To ukazuje, že ku spredmetneniu dochádza pred nástupom algebraickej symboliky. Spredmetnenie je kognitívna zmena, pri ktorej z určitého procesu sa stáva objekt (preto objektácia). To, či pre príslušný objekt nájdeme vhodné symbolické vyjadrenie (napríklad to, ktoré sme použili ako symbolický prepis Cardanových slov), je vedľajšie. Ide o schopnosť určitý kognitívny obsah vyčleniť, osamostatniť, udržať vo vedomí a rôzne s ním manipulovať. Takže u Cardana sa rodí kognitívny prístup k algebraickým výrazom ako k novému druhu algebraickej skutočnosti.

Keď si uvedomíme, že matematika nie je prírodná veda, teda predmety svojho výskumu nenachádza v prírode, ale prakticky všetky matematické objekty sa zrodili (alebo aspoň kognitívny prístup k nim vznikol) v procese spredmetnenia, vidíme, ako zásadnú úlohu hrá proces postupného spredmetňovania pre rozvoj matematiky. Tento proces sme podrobne popísali v knihe *Patterns of Change* a nebudeme sa tu púšťať do jeho výkladu. Uvedieme iba záverečný prehľad jednotlivých štádií objektácií v algebre (Kvasz, 2008a, s. 198–200). Vo vývine algebry možno rozlíšiť aspoň sedem štádií, ktoré sa líšia v tom, čo znamená riešiť algebraickú rovnicu. Riešiť rovnicu $g(x) = 0$ v rôznych vývinových štádiách algebry znamená:

a) *Nájsť regulu*, teda pravidlo zapísané v bežnom jazyku, ktoré vyjadruje *návod ako vypočítať* koreň rovnice. Príkladom je Cardanovo riešenie rovnice tretieho stupňa, uvedené v kapitole 2.2.1.
b) *Nájsť formulu*, teda výraz symbolického jazyka algebry, ktorý umožňuje *vyjadriť* koreň rovnice pomocou jej koeficientov, štyroch aritmetických operácií a odmocňovania. Jednotlivé znaky formuly zodpovedajú krokom výpočtu, takže formula je symbolickým zápisom reguly.
c) *Nájsť rozklad formy*, teda polynóm zodpovedajúci rovnici *rozložiť* na súčin lineárnych členov. Každý člen rozkladu formy obsahuje výraz vyjadrujúcu jeden koreň, takže rozklad formy dáva toľko koreňov, koľkého stupňa je rovnica. Riešiť algebraickú rovnicu na tomto, rovnako ako na nasledujúcich štádiách, znamená pre rovnicu n-tého stupňa nájsť *všetkých* jej n koreňov.
d) *Nájsť rezolventu*, teda daný problém *previesť* pomocou substitúcie na pomocnú úlohu nižšieho stupňa. Keď vyriešime pomocnú rovnicu, spätnou substitúciou dostávame riešenie pôvodného problému. Okrem koreňov rovnice dostávame aj čísla s nimi asociované. Teda v prípade rovnice n-tého stupňa dostaneme vo všeobecnosti $n!$ veličín. Z pomedzi nich možno vybrať n, pomocou ktorých sa dá príslušná forma rozložiť na lineárne členy.
e) *Nájsť rozkladové pole* $Q(\alpha_1,\dots \alpha_n)$ obsahujúce všetky korene polynómu. Kroky konštrukcie rozkladového poľa priamo zodpovedajú príslušným rezolventám.
f) *Nájsť faktorizáciu grupy symetrií poľa* $Q(\alpha_1,\dots \alpha_n)$, teda grupu symetrií *rozložiť* pomocou systému normálnych podgrúp. Faktorizácia grupy korešponduje rozkladu

poľa na jednotlivé rozšírenia, a tak zo znalosti faktorizácie grupy možno usudzovať na konštrukciu rozkladového poľa.

g) *Vytvoriť faktorizáciu okruhu Q[x] podľa ideálu (g(x)),* teda nájsť triedy rozkladu okruhu polynómov podľa ideálu prislúchajúceho danému polynómu. Jedna z tried je hľadaným riešením rovnice, a tak máme *univerzálny postup na riešenie ľubovoľnej algebraickej rovnice*.

Ak sa čitateľ ešte nestretol s niektorými pojmami použitými v bodoch a) až g), to nie je podstatné. Uvedený zoznam sme uviedli iba kvôli tomu, aby sme ilustrovali postupnosť abstrakčných zdvihov, ku ktorým v dejinách algebry došlo. Samozrejme, nie všetky uvedené úrovne tvoria náplň učiva základnej alebo strednej školy. Spolu však vhodne ilustrujú bohatstvo a rôznorodosť pojmotvorného procesu v algebre. Keď si podobnú postupnosť predstavíme okrem algebry aj v aritmetike, syntetickej geometrii a analytickej geometrii, získame aspoň približnú predstavu o bohatstve a zložitosti pojmovej výstavby matematiky. Aj keď sa žiak z mnohými z týchto pojmov nestretne, ostáva ich stále dostatočné množstvo na to, aby dali didaktikom podnet na zamyslenie.

2.4 Re-formulácie z pohľadu didaktiky matematiky

Nahradenie jednej formulácie (určitého tvrdenia, definície, argumentu) iným, presnejším, jasnejším alebo stručnejším (teda neekvivalentným) vyjadrením nazývame re-formuláciou. Na rozdiel od idealizácií či re-prezentácií si matematici aj didaktici matematiky re-formulácie dobre uvedomujú. Na matematike je nápadná presnosť jej jazyka a mnohí učitelia vidia svoju úlohu v tom naučiť žiakov presným, jasným a stručným formuláciám matematických poznatkov. Žiakom tieto presné, jasné a stručné formulácie predvedú, potom ich precvičujú a následne skúšajú, ako sa ich žiaci naučili.

To, čo konštruktivisti označujú ako tzv. transmisívna metóda vyučovania matematiky, to z kognitívneho hľadiska možno vymedziť ako vyučovanie, založené na presvedčení, že žiakov možno matematiku naučiť postupnosťou re-formulácií.[22] Tzv. transmisívna metóda je konštruktivistami kritizovaná preto, lebo ignoruje zákonitosti pojmotvorného procesu, nevytvára v mysli žiaka základné pojmy, ale odovzdáva mu iba presné formulácie hotových poznatkov. Zástancovia tzv. transmisívnej metódy sa podľa konštruktivistov uspokoja, keď žiak vie zopakovať presné formulácie preberaných definícií, poznatkov a postupov riešenia štandardných úloh.

Z matematického hľadiska sú niektoré re-formulácie zaujímavé. Ako príklad uvedieme re-formuláciu piateho postulátu, ktorý Euklides formuloval slovami:

[22] Termín *transmisívna metóda* používame s prívlastkom „tzv.“, aby sme zvýraznili, že to je termín, ktorý používajú konštruktivisti na označenie svojich oponentov. Didaktici, ktorých výuku konštruktivisti takto nazývajú, však sami seba takto neoznačujú, lebo toto označenie nepovažujú za adekvátne ani presné.

> A ak nejaké dve priame čiary pretne iná priama čiara tak, že vytvorí na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, tak aby sa tieto priame čiary, ak budú predĺžené do nekonečna, stretli na tej strane, na ktorej sú uhly menšie než dva pravé (Šír, ed., 2011, s. 117, preklad z češtiny L. K.).

Táto formulácia piateho postulátu má v gréckom origináli 36 slov. Zvyšné štyri postuláty majú dohromady iba 32 slov. V roku 1795 anglický matematik John Playfair uverejnil text Euklidových *Základov*, v ktorom Euklidovu formuláciu nahradil novou:

> Ak je daná priamka *l* a bod *P*, ktorý na nej neleží, môžeme viesť jednu a len jednu priamku prechádzajúcu bodom *P*, ktorá nepretne *l* (Gray, 1989, s. 87).[23]

Obe formulácie piateho postulátu sú z logického hľadiska ekvivalentné, z prvej vyplýva druhá a naopak. Ale z kognitívneho hľadiska je medzi nimi rozdiel. Playfairova formulácia otvára dvere smerom k neeuklidovským geometriám. Stačí spojenie „jednu a len jednu" nahradiť slovom „dve" alebo „žiadnu" a máme Bolyaiov-Lobačevského resp. Riemannov systém neeuklidovskej geometrie.

Príklad piateho postulátu ukazuje, že problematika re-formulácií je významná, zaujímavá a kognitívne dôležitá. Keď konštruktivisti kritizujú prístup k vyučovaniu matematiky, ktorý výuku zakladá na tom, že žiakom predkladá presné formulácie hotových poznatkov, to neznamená, že by snaha o presnosť pri formulovaní matematických poznatkov nebola dôležitá. Tzv. transmisívna metóda nie je zlá kvôli tomu, čo robí, ale kvôli tomu čo nerobí. Spravidla totiž žiakom nepomáha pri procesoch *objektácií*, *re-prezentácií* a predovšetkým *idealizácie*. Kvôli tomu je konštruktivistami kritizovaná. To, že poznatky, ktorých presné formulácie žiakom predkladá k pamäťovému učeniu, sú pekné, užitočné a dôležité, o tom nik nepochybuje. Ale aj keby sa ich žiaci dokonale naučili, matematiku sa tak nenaučia. Budú ju schopní nanajvýš imitovať.

3 Záver

Celkovo možno povedať, že zmeny v pojatí matematiky, ktoré si väčšina z nás nie vždy uvedomuje, ako sú idealizácie, re-prezentácie a aj niektoré objektácie,[24] sú

[23] Tvrdenie ekvivalentné s Playfairovou formuláciou uvádza Euklides ako vetu XXXI prvej knihy *Základov* a formuluje ho slovami „Daným bodom veď rovnobežku s danou úsečkou". Keby toto tvrdenie povýšil na postulát, sloveso by musel zmeniť z imperatívu (veď) na neurčitok (viesť), rovnako ako je to u Playfaira. Samozrejme, voľba iného tvrdenia za piaty postulát nie je jediná vec, v ktorej sa Euklidov pôvodný systém odlišuje od Playfairovho. Líšia sa tým, že Euklides pracuje výhradne s konečnými objektmi, kým Playfair pracuje s nekonečnými priamkami (čo je objektácia, ktorú sme podrobnejšie vyložili v knihe Kvasz, 2008a). Jej zvláštnosťou bolo, že sa primárne odohrala v maliarstve, nie v geometrii (pozri Kvasz, 2020, s. 22–48). Ale keď si túto zásadnejšiu zmenu odmyslíme, stále tu je možnosť vybrať vetu XXXI za piaty postulát. Euklides to mohol urobiť, ale neurobil to. Playfaira uvádzame ako doklad toho, že sa to urobiť dá, a keby to bol Euklides urobil, dejiny geometrie by sa pravdepodobne uberali úplne inými cestami. Problematiku piateho postulátu podrobnejšie analyzuje napríklad Vincenzo De Risi (2016).

[24] Ako bol prechod od konečných úsečiek k nekonečným priamkam v renesancii.

veľmi zložité zmeny. Inštrumentálny realizmus je schopný rôzne druhy kognitívnych zmien detailne popísať, a tak môže didaktike matematiky ponúknuť nástroje na analýzu týchto zmien v poznávacom procese u žiaka, kedy sú jednotlivé druhy zmien vzájomne prepletené a rôzne sa prekrývajú, keďže prebiehajú všetky súčasne. Okrem toho môže inštrumentálny realizmus ponúknuť didaktike matematiky aj určité základné poznatky o dynamike jednotlivých druhov zmien.

Asi najvýznamnejší prínos inštrumentálneho realizmu však vidíme v celkovom prístupe k vyučovaniu matematiky. Inštrumentálny realizmus ponúka určitú alternatívu, či tretiu cestu, medzi pojatím didaktiky zameraným na učivo, ktoré vidí cieľ vzdelávania v odovzdaní určitého súboru poznatkov (či určitého kultúrneho dedičstva), a pojatím didaktiky zameranej na kompetencie, ktoré vidí cieľ vzdelávania v naučení schopnosti prakticky konať v určitých situáciách. Prvý z týchto prístupov je bližší humanitným oborom, predovšetkým histórii a literatúre, kde sa kladie väčší dôraz na to mladej generácii odovzdať dedičstvo, ktoré sme dostali od našich otcov a matiek, v jeho komplexnosti a bohatstve. Naproti tomu kompetencie viac vyhovujú potrebám výuky cudzích jazykov, kde je dôležité naučiť žiaka cudzí jazyk predovšetkým aktívne používať, kým kultúrne reálie, viažuce sa k danému jazyku, stoja až v druhom pláne. Matematika sa nachádza niekde medzi týmito dvomi krajnosťami. Inštrumentálny realizmus, upriamením pozornosti na postupnosť kognitívnych zmien v mysli žiaka, ponúka tretie pojatie zmyslu vyučovania: cieľom vyučovania je navodiť v mysli žiaka *kognitívne zmeny*, ktoré sú predpokladom úspešného porozumenia a aktívneho osvojenia si učiva.

Tento prístup akceptuje, že zmyslom vyučovania je odovzdať určité dedičstvo, ale týmto dedičstvom je *kognitívne dedičstvo*, teda schopnosť rozumieť, objavovať a riešiť problémy. Matematika je nositeľkou tisícročnej tradície počítania, dokazovania a konštruovania, a toto *dedičstvo* sa dá odovzdať len ako porozumenie *jeho* pravidlám počítania, porozumenie *jeho* argumentom pri dokazovaní a porozumenie *jeho* postupom konštruovania. Na druhej strane prístup inštrumentálneho realizmu akceptuje, že žiakov musíme naučiť matematiku aktívne používať v reálnych situáciách. Ale v matematike, na rozdiel od jazyka, neexistujú kompetencie (pre zdôvodnenie tejto tézy pozri Kvasz, 2016, s. 36-41). To, čo učíme, nie je zvládanie situácií, ale vhľad do nich, porozumenie príčinám toho, prečo to, čo robíme, aj skutočne funguje. Hovorca jazyka nemusí vedieť *zdôvodniť* gramatické pravidlá, ktorými sa pri používaní jazyka riadi – väčšina z nás si všetky pravidlá gramatiky ani neuvedomuje. A určite po ňom nechceme, aby pravidlá gramatiky *zovšeobecňoval*. Naproti tomu v matematike pokiaľ nerozumieme tomu, prečo veci fungujú, vlastne nerobíme matematiku, ale len imitujeme prácu tých, ktorí matematike rozumejú.[25] Keď v matematike niečo pochopíme, je prirodzené skúsiť to zovšeobecniť, vyskúšať to v iných kontextoch.

[25] Učenie sa jazyka je práve takýto imitatívny nácvik. V čom sa matematika zásadne odlišuje od jazyka a prečo v matematike neexistujú kompetencie, je práve to, že matematika nie je založená na imitácii, ale na porozumení. Matematiku nie je možné sa naučiť (myslí sa naučiť sa naspamäť), ale je možné ju iba pochopiť.

Dodatok: podrobnejší opis vzniku symbolu odmocniny

V kapitole 2.2.1. sme stručne ilustrovali vznik symbolickej algebry na príklade vzniku a ustálení rôznych aspektov jediného symbolu – symbolu pre odmocninu. Odmocňovanie je, podobne ako umocňovanie, operácia známa z aritmetiky. V algebre však dochádza k premene odmocňovania na odmocninu, ktorú môžeme aplikovať nielen na čísla, ale aj na algebraické výrazy.

Ako sme spomenuli, bol to Regiomontanus kto zaviedol do matematiky pojem odmocniny a vypracoval pravidlá na počítanie s odmocninami. Odmocninu označil veľkým písmenom *R*, takže $\sqrt{8}$ písal ako *R de 8* a $\sqrt[3]{7}$ ako *R cubica de 7*.

Nicolas Chuquet už nevypisoval stupeň odmocniny slovne, ako Regiomontanus, ale pomocou horného číselného indexu, takže napríklad jeho R^2 30 znamenalo $\sqrt{30}$. Táto inovácia má štyri aspekty. Po prvé symbol pre odmocninu sa stáva *zloženým symbolom*. Skladá sa z časti označujúcej *identitu operácie R* (tá ešte nesie stopy synkopickej algebry; *R* odkazuje na radix) a *indexu* 2 označujúceho jej stupeň. Po druhé, index udávajúci stupeň je *aritmetickým indexom*, takže automaticky kóduje vzťahy rôznych odmocnín pri operáciách – napríklad, že tretia odmocnina z druhej odmocniny je šiesta odmocnina (teda umocňovanie a odmocňovanie vedie k násobeniu indexov), čo je prvý krok na ceste k logaritmom. Po tretie aritmetický index umožňuje zaviesť *záporné odmocniny*, čo Chuquet aj skutočne urobil. Niečo také v aritmetike, kde umocňovanie znamená opakované násobenie, nedáva zmysel. Naše $42x^2 : 6x^5 = 7x^{-3}$ zapísal ako $42^2 \div 6^5$ egaulx $7^{3\,\tilde{m}}$. Tu $\tilde{m}$ je synkopický znak, ktorý označuje mínus. Štvrtým aspektom Chuquetovej symboliky pre odmocniny bolo, že na označenie rozsahu operácie odmocňovania používal *podčiarkovanie*.

Luca Pacioli písal pred členy, ktoré chcel odmocniť, písmeno *V* od *universale* (spoločný). Teda *RV* 35 $\tilde{m}$ *R* 50 znamenalo $\sqrt{35-\sqrt{50}}$. Myšlienka označiť rozsah operácie odmocňovania sa tak objavila *nezávisle v niekoľkých variantoch*. Aj keď Pacioliho spôsob nie je tak dobrý ako Chuquetov, Cardano pri zápise riešenia rovnice tretieho stupňa použil Pacioliho zápis. Keď Cardanovu formulu *RV: cub: R: 108 p: 10 m: RV: cub: R: 108 m: 10*, prepíšeme do našej symboliky, ktorá kopíruje Chuquetove používanie vodorovnej čiary na označenie rozsahu odmocniny, len miesto podčiarkovania my výraz, ktorý sa má odmocniť, „nadčiarkujeme“, dostaneme $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Porovnaním oboch zápisov vidíme *nejednoznačnosť symbolu RV* a tým aj výhody Chuquetovho podčiarkovania. Napriek tomu bola Pacioliho symbolika dostatočne flexibilná, aby Cardanovi umožnila vyjadriť riešenie rovnice tretieho stupňa. Súčasne tu vidíme jeden z motívov, poháňajúcich vývin algebraickej symboliky, totiž snahu po *jednoznačnosti symbolov*.

Michael Stifel neznámu označoval veľkým *R*, aby mohol malé *r* použiť na označenie odmocniny. Teda iba prehodil malé *r* a veľké *R* pri značení neznámej (*res*) a odmocniny (*radix*). Odmocňovanie označoval štylizovaným písmenom *r* v tvare $\sqrt{\ }$, ktorý používame podnes. Toto je pozoruhodný prechod od synkopickej algebry k symbolickej, kde v Stifelovom znaku prestávame cítiť jeho synkopický pôvod (malé *r*) a začíname ho vnímať ako čistý symbol (t. j. konvenčne zvolený znak bez akéhokoľvek súvisu s tým, čo označuje). Druhú odmocninu písal ako $\sqrt{z}$, tretiu ako $\sqrt{c}$, štvrtú ako $\sqrt{z}$. Teda aj Stifel chápal symbol pre odmocninu ako *zložený* z dvoch komponent, a prináša tretiu komponentu. Vedľa prvej komponenty, ktorou je štylizované *r* slúžiace ako *indikátor identity* (Chuquet identitu odmocniny označoval veľkým *R*), a druhej komponenty, ktorou je *indikátor stupňa odmocniny* (kde ešte nepoužíva aritmetický *index*, ale synkopický znak ako *z*, *c*, či *zz*) Stifel vyčleňuje *miesto* pod znakom odmocniny, z ktorého sa vyvinie *miesto pre argument*. Ešte toto miesto nepoužíva na umiestnenie argumentu, t. j. odmocňovaného výrazu. Miesto toho tam dáva indikátor stupňa. Ale rozhodujúce je, že Stifel rozpoznal možnosť *vnoriť* do symbolu pre odmocninu ďalšie znaky.

René Descartes je tvorcom našej symboliky pre odmocniny. Od Stifela prijal ideu vziať štylizované malé *r* ako symbol pre odmocňovanie. To, že o ktorú odmocninu ide, vyjadril pomocou *aritmetického indikátora* (podobne ako Chuquet), a nie pomocou písmena ako Stifel. Tomuto indikátoru dal podobu ľavého horného indexu (Chuquet používal pravý horný index) a pripojil ho ku znaku pre odmocninu (kam ho píšeme podnes). Tým sa vyprázdnilo miesto pod odmocninou, kam Stifel umiestňoval indikátor stupňa. Descartes tam mohol umiestniť *argument*, teda odmocňovaný výraz, čím vytvoril asi po prvý krát v dejinách odlíšenie funkcionálneho symbolu a argumentu. Descartes okrem toho prijíma Chuquetovu myšlienku, že rozsah odmocniny je vyznačený pomocou *vodorovnej čiary* (fungujúcej ako určitý druh zátvoriek). Na rozdiel od Chuqueta však použil *hornú čiaru* a nie dolnú, čo umožnilo spojiť ju s hornou nožičkou štylizovaného *r* označujúceho identitu odmocniny do jediného znaku.

Môžeme zhrnúť: symbol pre odmocninu vznikol zrastením viacerých aspektov:[26]

1. Zavedenie *indikátora identity* odmocniny pomocou synkopického znaku *R* od slova *radix* (1460 – Regiomontanus)
2. Zavedenie *indikátora stupňa* odmocniny pomocou synkopického znaku alebo celého slova, na označenie toho, o ktorú odmocninu ide (1460 – Regiomontanus)
3. Zavedenie *indikátora rozsahu pôsobenia* odmocniny pomocou symbolického znaku v tvare vodorovnej čiary (podčiarknutia) ako istého typu zátvoriek (1484 – Chuquet)
4. Premena indikátora stupňa zo samostatne stojaceho synkopického znaku na *pravý horný* aritmetický index (1484 – Chuquet).
5. Premena indikátora stupňa zo samostatne stojaceho synkopického znaku na pravý horný *aritmetický* index (1484 – Chuquet).[27]
6. Nahradenie synkopického označenia identity odmocniny pomocou veľkého *R* malým *r*, ktoré sa dá spojiť s ďalšími prvkami zloženého znaku (1544 – Stifel).

[26] V prehľade aspektov výsledného symbolu pre odmocninu a ich zmien sme sa usilovali odlíšiť *zavedenie*, t. j. vznik nového aspektu, ktorý v pôvodnej alebo v pozmenenej podobe bude trvalou súčasťou symbolu; *premenu*, čím rozumieme konceptuálny zdvih zvyšujúci expresivitu symbolu alebo jeho jednoznačnosť; *nahradenie*, čím rozumieme zmenu, ktorá modifikuje pôvodný nápad niečím, čo je s ním v zásade rovnocenné, ale lepšie ladí s ostatnými prvkami; a *zrastanie*, čím rozumieme spojenie jednotlivých aspektov do výsledného symbolu.

[27] Body 4 a 5 označujú rôzne aspekty jednej veci. Na Chuquetovom indikátore stupňa odmocniny je zaujímavé jednak, že ide o *index*, ktorý by však mohol byť aj synkopický, a jednak to, že tento index je *aritmetický*.

7. Zavedenie *miesta pre indikátor stupňa odmocniny* ako prázdneho miesta vloženého pod znak odmocniny (1544 – Stifel).
8. Nahradenie pravého horného indexu ako indikátora stupňa odmocniny ľavým horným *indexom* (1637 – Descartes).
9. Nahradenie podčiarkovania ako indikátora rozsahu pôsobenia odmocniny *hornou čiarou* (1637 – Descartes).
10. Premena miesta pod znakom odmocniny z miesta pre indikátor stupňa odmocniny na *miesto pre argument* (1637 – Descartes).
11. Zrastenie miesta pre argument (10), hornej čiary (9), ľavého horného indexu (8) v tvare aritmetického indexu (5) so štylizovaným malým *r* (6) v *jediný symbol*, na ktorom nevidno švy medzi jeho uvedenými aspektmi (1637 – Descartes).

Uvedený zoznam jedenástich zmien, ktoré vytvárajú symbol pre odmocninu, má dve zaujímavé črty. Jednak si môžeme všimnúť, že inovácie neprichádzajú jednotlivo, ale v určitých zhlukoch (od Regiomontana sú dve, od Chuqueta tri, od Stifela dve a od Descarta tri), teda ako keby existovali určité fragmentárne riešenia, ktoré umožnia zvládnuť určitý aspekt výslednej symboliky. Okrem toho prakticky žiaden aspekt symbolu pre odmocninu sa nezrodil v podobe, v akej bol do výsledného symbolu začlenený, teda výsledná symbolika je výsledkom kompromisov medzi jednotlivými fragmentmi. To jasne ukazuje *kognitívnu zložitosť* vzniku symbolickej algebry.

Samozrejme, nebolo by vhodné, keby sa škola usilovala kopírovať všetky zákruty cesty vedúcej ku vzniku algebraickej symboliky od Regiomontana po Descarta. Ale ani súčasná prax, ktorá žiakom predkladá až výsledný produkt v jeho monolitickej (teda jednotnej a uhladenej) podobe, sa nezdá byť najvhodnejšou. Svedčia o tom okrem iného aj notoricky známe ťažkosti žiakov so slovnými úlohami (teda úlohami *rétorickej* podoby, ktoré žiaci nevedia preložiť do *symbolického* zápisu). Je možné, že okrem vynechania synkopickej algebry, ktorá je prirodzeným mostom medzi rétorickou a symbolickou algebrou, tu svoju úlohu hrá aj to, že jednotlivé aspekty algebraickej symboliky (ako sú indikátor stupňa, indikátor identity, indikátor rozsahu, a odlíšenie funkcionálneho symbolu a argumentu) prichádzajú všetky naraz. Vyššie uvedených jedenásť bodov a predovšetkým odlíšenie jednotlivých indikátorov predstavujú pokus rozbiť algebraickú symboliku na jej kognitívne komponenty, ktoré môžu slúžiť ako východisko pre vypracovanie didaktického postupu pre ich zavedenie.[28]

Poďakovanie

Stať je súčasťou projektu Progres Q17 *Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu*.

[28] Samozrejme, uvedomujeme si, že čo sme uviedli, je iba náčrt rozkladu jediného symbolu. Keby sa podarilo celú algebraickú symboliku rozbiť na jej kognitívne komponenty, umožnilo by to presnejšie diagnostikovať problémy žiakov pri úprave výrazov a pri slovných úlohách. Oddelený nácvik práce s jednotlivými komponentmi by potom mohol byť cestou, ako tieto problémy účinne riešiť.

Literatúra

Al-Chwárizmí, M. (1983). Kratkaja kniga ob isčislenii algebry i almukabaly [preklad z arabštiny B. A. Rozenfeľda]. In M. Al-Chorezmi, *Matematičeskije traktaty* (s. 20–81). Taškent: Izdateľstvo FAN Uzbekskoj SSR.

Cardano, G. (1968). *Ars magna, or the rules of algebra*. Cambridge: MIT Press.

De Risi, V. (2016). The development of Euclidean axiomatics. *Archive for History of Exact Sciences, 70*(6), 591–676.

Dubinsky, E., & Mcdonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level* [New ICMI Study Series, Vol. 7] (s. 273–280). Dordrecht: Springer.

Eukleides (2007). *Základy, knihy I–IV* [preklad F. Servíta komentovaný P. Vopěnkom]. Nymburk: OPS.

Frege, G. (1989). Funktion und Begriff. In: G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung* (s. 17–39). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Gray, J. (1989). *Ideas of space, Euclidean, non-Euclidean and relativistic*. Oxford: Clarendon Press.

Hejný, M. (2007). Budování matematických schémat. In A. Hošpesová et al. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 81–122). České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Husserl, E. (1939). Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentionalhistorisches Problem. *Revue Internationale de Philosophie*, *1*(2), s. 203–225.

Jirotková, D. (2017). Rytmus, pohyb, periodicita, nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel. In: J. Slavík et al., *Didaktické kazuistiky v oborech školního vzdělávání* (s. 187–216). Brno: Masarykova univerzita.

Kohout, J., Mollerová, M., Masopust, P., Feřt, L., & Slavík J. (2019). Kritická místa kurikula na základní škole pohledem mezinárodního šetření TIMSS a českých učitelů, poznatky z fyziky. *Pedagogická orientace, 29*(1), 5–42.

Kuhn, T. S. (1982). *Štruktúra vedeckých revolúcií*. Bratislava: Pravda.

Kvasz, L. (1995). On the significance of Piaget's concept of the epistemological framework for mathematics education. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *4*, 55–65.

Kvasz, L. (1996). Náčrt analytickej teórie subjektu. *Filosofický* časopis, *44*(4), 617–640.

Kvasz, L. (1998a). *O revolúciách vo vede a ruptúrach v jazyku vedy.* Bratislava: Univerzita Komenského.

Kvasz, L. (1998b). History of geometry and the development of the form of its language. *Synthese*, *116*(2), 141–186.

Kvasz, L. (1999). On classification of scientific revolutions. *Journal for General Philosophy of Science*, *30*(2), 201–232.

Kvasz, L. (2000a). Changes of language in the development of mathematics. *Philosophia mathematica*, *8*(1), 47–83.

Kvasz, L. (2000b). Epistemologické aspekty dejín klasickej algebry. *Filozofia*, *55*(10), 788–808.

Kvasz, L. (2001a). Epistemologické aspekty dejín modernej algebry. *Filozofia, 56*(5), 309–331.

Kvasz, L. (2001b). O Piagetovi, dialektike a členskom. *Organon F, 8*(1), 56–73.

Kvasz, L. (2002). Galilean physics in light of Husserlian phenomenology. *Philosophia Naturalis, 39*(2), 209–233.

Kvasz, L. (2003). The mathematisation of nature and Cartesian physics. *Philosophia Naturalis, 40*(2), 157–182.

Kvasz, L. (2005a). Similarities and differences between the development of geometry and of algebra. In C. Cellucci & D. Gillies (Eds.), *Mathematical reasoning and heuristics* (s. 25–47). London: King's College Publications.

Kvasz, L. (2005b). The mathematisation of nature and Newtonian physics. *Philosophia Naturalis, 42*(2), 183–211.

Kvasz, L. (2006). History of algebra and the development of the form of its language. *Philosophia Mathematica, 14*(3), 287–317.
Kvasz, L. (2008a). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel: Birkhäuser.
Kvasz, L. (2008b). Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(2), 108–123.
Kvasz, L. (2012a). Kuhnova *Štruktúra vedeckých revolúcií* medzi históriou a epistemológiou. *Teorie vědy, 34*(2), 167–187.
Kvasz, L. (2012b). Galileo, Descartes, and Newton – founders of the language of physics. *Acta Physica Slovaca, 62*(6), 519–614.
Kvasz, L. (2013a). *Zrod vedy ako lingvistická udalosť. Galileo, Descartes a Newton ako tvorcovia jazyka fyziky*. Praha: Filosofia.
Kvasz, L. (2013b). Jazyk matematiky, jeho změny a didaktika matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58*(4), 315–325.
Kvasz, L. (2013c). Historické aspekty vyučování algebry. In M. Rendl et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 301–324). Praha: Pedagogická fakulta UK.
Kvasz, L. (2014a). Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky. *Filosofický časopis*, *62*(5), 643–659.
Kvasz, L. (2014b). Kuhn's *Structure of Scientific Revolutions* between sociology and epistemology. *Studies in History and Philosophy of Science, 46*(2), 78–84.
Kvasz, L. (2015a). *Inštrumentálny realizmus*. Praha: Pavel Mervart.
Kvasz, L. (2015b). Über die Konstitution der symbolischen Sprache der Mathematik. In G. Kadunz (Ed.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (s. 51–67). Berlin: Springer.
Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis Scholae, 10*(2), 15–45.
Kvasz, L. (2017). Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky. *Filosofický časopis, 65*(4), 513–541.
Kvasz, L. (2018). On the roles of language in mathematics education. In P. Ernest (Ed.), *Philosophy of mathematics education today* (s. 229–240). Cham: Springer.
Kvasz, L. (2020). *Prostor mezi geometrií a malířstvím*. Praha: Slovart.
Posner, J., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education 66*(2), 211–227.
Rodová, V., & Slavík, J. (2018). Živé obrazy jako metoda výuky dějepisu: analytické zobecnění poznatků z praxe. *Studia paedagogica, 23*(3), 9–47.
Rusek, M., Slavík, J., & Najvar, P. (2016). Obsahová konstrukce a didaktické uplatnění přírodovědného edukačního experimentu ve výuce na příkladu chemie. *Orbis Scholae, 10*(2), 71–91.
Slavík, J. (2017). Kvaszův instrumentální realizmus v zorném poli didaktiky. *Pedagogika, 67*(3), 311–322.
Šír, Z. (Ed.). (2011). *Řecké matematické texty*. Praha: Oikoymenh.
Thagard, P. (1992). *Conceptual revolutions*. Princeton: Princeton University Press.
Vopěnka, P. (2003). *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha: Práh.
Wittgenstein, L. (1989). *Tractatus Logico-philosophicus*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
Magdalény Rettigové 4, 116 39 Praha 1
ladislav.kvasz@pedf.cuni.cz