# Princípy genetického konštruktivizmu

Ladislav Kvasz
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta

**Abstrakt:** Cieľom príspevku je vymedziť teoretické východiská prístupu k didaktike matematiky, ktorý už niekoľko desaťročí rozvíja Milan Hejný. Chceme na jeho označenie navrhnúť názov *genetický konštruktivizmus,* a tak ho odlíšiť od radikálneho konštruktivizmu, s ktorým býva často stotožňovaný a vďaka tomuto stotožneniu aj kritizovaný. Náš text má štyri časti. V prvej časti sa pokúsime sformulovať základné teoretické princípy genetického konštruktivizmu. V druhej časti budeme reagovať na hlavné body kritiky Hejného metódy, ktoré boli publikované v textoch našich popredných psychológov Miroslava Rendla a Stanislava Štecha. V tretej časti použijeme princípy genetického konštruktivizmu na kritiku prístupu k vyučovaniu matematiky, založeného na pojme matematických kompetencií. Pokúsime sa ukázať, že nič také, ako matematické kompetencie v striktnom význame slova neexistuje. V záverečnej časti sa chceme stručne vyjadriť k článku Radima Šípa, ktorý zaraďuje Hejného metódu do širších metodologických súvislostí.

**Kľúčové slová:** didaktika matematiky, Hejného metóda, radikálny konštruktivizmus, kompetencie

## Principles of Genetic Constructivism

**Abstract:** The aim of the present paper is to clarify the theoretical principles of an approach to the didactics of mathematics, which has been for several decades developed by Milan Hejný. We want to suggest for this approach a new name, genetic constructivism, to distinguish it from radical constructivism with which it is often identified and on the basis of this identification also criticized. Our text has four parts. In the first we will try to formulate the basic theoretical principles of genetic constructivism. In the second part we will respond to the main points of criticism of Hejný's method that have been published in the texts of our distinguished psychologists Miroslav Rendl and Stanislav Štech. In the third part we use the principles of genetic constructivism to criticise the approach to teaching of mathematics, based on the concept of mathematical competence. We will try to show that no such thing as a mathematical competence, in the strict sense of the word, does exist. In the fourth and final part we would like to briefly comment on the article by Radim Šíp which integrates Hejný's method into a broader methodological perspective.

**Keywords:** mathematics education, Hejný's method, radical constructivism, competencies

Cieľom príspevku je pokúsiť sa vymedziť teoretické východiská prístupu k didaktike matematiky, ktorý už niekoľko desaťročí rozvíja Milan Hejný. Chceme na jeho označenie navrhnúť nový názov – *genetický konštruktivizmus* – a tak ho odlíšiť od radikálneho konštruktivizmu, s ktorým býva stotožňovaný a vďaka tomuto stotožneniu aj

https://doi.org/10.14712/23363177.2017.1
www.orbisscholae.cz

kritizovaný.[1] Hejný je praktik, skeptický voči teoretickým všeobecnostiam, a preto sme sa od neho nedočkali programového textu, v ktorom by svoj prístup teoreticky zhrnul a vymedzil voči alternatívnym prístupom. Viac než teoretické východiská ho zaujíma praktické použitie tohto prístupu. Hejného texty sú adresované skôr učiteľom, ktorých si chce získať pre svoju metódu, než teoretikom, s ktorými by chcel viesť akademický dialóg. Keď teoreticky fundovaní kolegovia tieto texty čítajú, často si neuvedomia, komu sú adresované, čítajú ich ako teoretické diela, a následne ich rozhorčene kritizujú. Boli to kritiky psychológov – Miroslava Rendla a Stanislava Štecha – ktoré motivovali napísanie tohto príspevku. Jeho cieľom je sformulovať princípy genetického konštruktivizmu a ukázať, že väčšina jeho kritiky sa zakladá na nedorozumeniach.

Príčiny týchto nedorozumení vidíme jednak v tom, že *Hejného texty*, ktorých poslaním bolo osloviť adresáta (spravidla učiteľa základnej školy či študenta primárnej pedagogiky) a získať ho pre novú metódu, boli čítané ako teoretický výklad jeho metódy. Keď ponúkneme výklad princípov genetického konštruktivizmu, chceme túto, často oprávnenú, kritiku apelatívnych téz nahradiť dialógom o teoretických princípoch. Ďalšou príčinou nedorozumení je, že *Hejný sa prihlásil ku konštruktivizmu*, ktorý sa v didaktike matematiky začal formovať na konci minulého storočia. Hejného metóda tak začala byť vnímaná a interpretovaná z hľadiska teoretických východísk tohto širšieho prúdu, čo viedlo k prehliadaniu jej špecifického charakteru. Chceme zdôrazniť, že Hejného metóda sa zrodila nezávisle od konštruktivizmu a nie je možné jej porozumieť, keď sa na ňu pozeráme optikou radikálneho konštruktivizmu. Okrem toho, v dôsledku prihlásenia sa ku konštruktivizmu začali sa s Hejného metódou spájať *politické a hodnotové postoje*, ktoré sú s konštruktivizmom v západnej spoločnosti spojené. Jedným z dôvodov pre zavedenie nového názvu pre Hejného metódu je pokúsiť sa zabrániť jej spájaniu s politickými a hodnotovými postojmi zástancov radikálneho konštruktivizmu, ktoré sú, podľa nášho presvedčenia, autorovi genetického konštruktivizmu cudzie. Ako štvrtú a najdôležitejšiu príčinu nedorozumení vidíme v tom, že *mnohé princípy Hejného metódy ostali nevyslovené*. Síce sa nimi Hejný vo svojej práci riadi, ale vo svojich textoch ich nespomína. A sú to práve tieto implicitné princípy, ktoré genetický konštruktivizmus zásadne odlišujú od ostatných foriem konštruktivizmu. Našou úlohou bude tieto implicitné princípy explicitne sformulovať a ponúknuť ich ako alternatívny interpretačný rámec Hejného metódy, ktorým chceme nahradiť rámec radikálneho konštruktivizmu, ktorý sa nám zdá pre porozumenie Hejného metódy nevhodný.

[1] Potrebu dištancovať sa od radikálneho konštruktivizmu pociťuje aj Hejný. Vo svojej nedávnej publikácii píše: „Abychom edukační styl, který jsme rozpracovali a vyzkoušeli, uchránili od nedorozumění, dáváme mu jméno, ve kterém se slovo konstruktivismus nevyskytuje – vyučování orientované na budování schémat." (Hejný, 2014, s. 121). František Kuřina, spoluautor knihy *Dítě, škola, matematika*, sa od radikálneho konštruktivizmu dištancuje tým, že svoju pozíciu nazýva *realistický konstruktivismus* (Kuřina & Hejný, 2015, s. 208). Domnievame sa, že Hejného metóda je konštruktivistická, a tak odmietnutie tohto termínu je rovnako neoddôvodnené, ako bolo neoddôvodnené stotožnenie Hejného metódy s radikálnym konštruktivizmom. Motív realizmu vo výčte princípov Hejného metódy zaznie (v kap. 1.2), avšak genetický konštruktivizmus nám pripadá ako priliehavejší názov pre Hejného metódu, než realistický konštruktivizmus.

Piaty zdroj nedorozumení tkvie v tom, že viaceré explicitne sformulované princípy tejto metódy sú pre bežného čitateľa nezrozumiteľné, pretože predpokladajú *špecifické pojatie histórie a epistemológie matematiky* (tzv. genetický prístup k matematike). Viaceré Hejného didaktické zásady dávajú zmysel a stávajú sa plauzibilnými až keď ich vztiahneme k výkladu dejín matematiky, robenému zo špeciálneho epistemologického pohľadu.

V predkladanom texte sa pokúsime explicitne sformulovať viaceré, doposiaľ neartikulované princípy genetického konštruktivizmu, a tým podporiť plauzibilnosť psychologických a pedagogických princípov, ktoré sú predmetom kritiky.[2] Náš text má štyri časti. V prvej časti sa pokúsime sformulovať základné princípy genetického konštruktivizmu. V druhej časti budeme reagovať na hlavné body kritiky Hejného metódy v textoch *O konstruktivismu ve vyučování matematiky* (Rendl, 2008), *Should Learning (Mathematics) at School Aim at Knowledge or at Competences?* (Rendl & Štech, 2012) a *Když je kurikulární reforma evidence-less* (Štech, 2013). Našim cieľom je rozptýliť nedorozumenia, na ktorých je táto kritika založená. V tretej časti použijeme princípy genetického konštruktivizmu na zdôvodnenie tézy, že *kompetencie v matematike neexistujú*. To ukazuje, že genetický konštruktivizmus stojí bok po boku s Rendlom a Štechom v boji proti vyučovaniu znalostných predmetov zameranom na rozvoj kompetencií, takže ich kritika Hejného metódy je aj strategicky kontraproduktívna. V záverečnej časti sa chceme vyjadriť k článku Radima Šípa *Pedagogika a paradigmatický obrat v metodológii teórii* (Šíp, 2015), ktorý sa o Hejného metóde vyjadruje so sympatiami.

## 1 Základné princípy genetického konštruktivizmu

Ako naznačuje názov „genetický konštruktivizmus“, to základné, čo túto metódu odlišuje od ostatných druhov konštruktivizmu je *genetický prístup k matematike* založený na detailnom poznaní jej histórie a epistemológie. Napriek tomu, že ide o formu konštruktivizmu, tento je zasadený do pevného rámca *genézy matematického poznania*. Je to práve tento genetický rámec, ktorý zmierňuje radikálnosť Hejného psychologických a pedagogických téz. Stručne povedané, žiak síce musí matematiku objavovať, úlohou učiteľa je však úlohy, ktoré žiakovi predkladá, voliť tak, aby žiak pri *konštrukcii svojho matematického poznania rekonštruoval proces jeho historickej genézy*. Pedagóg, ktorý žiaka sprevádza po ceste za poznaním, a to aj napriek všetkým Hejného prehláseniam o opaku, nie je pasívny. Voľbou úloh, ich radením do genetickej postupnosti, prepájaním rôznych epistemologických kontextov,

[2] V článku neuvádzame všetky princípy genetického konštruktivizmu. Dôležitým princípom, ktorý neuvádzame, je napríklad princíp emočného základu matematického poznania (tzv. zásada klímy), rovnako ako princíp nadradenosti výchovy nad výukou (tzv. zásada hierarchie cieľov) – pozri (Hejný & Hejný, 1977/2012, s. 70). Keď tieto princípy neuvádzame, nerobíme to preto, že by sme ich považovali za menej dôležité než princípy, ktoré uvádzame. Náš text je však predovšetkým reakciou na kritiku Hejného metódy zo strany uvedených psychológov, a preto uvádzame predovšetkým tie princípy, ktoré sú z hľadiska tejto kritiky relevantné.

reakciou na žiakove chyby, či riadením diskusie v triede zásadným spôsobom ovplyvňuje poznávací proces žiaka. Robí to však inak než učiteľ v tradičnej škole. Namiesto hotových poznatkov žiakovi *predkladá* špeciálnym spôsobom vytvorený súbor problémov. Tieto problémy sú zvolené tak, že pri ich riešení žiak postupne opakuje *proces genézy matematického poznania*.

Okrem historickej dimenzie má genetická metóda aj špecifický *epistemologický* rozmer. Ide o to, že históriu nepoužíva iba ako rezervoár, v ktorom sú matematické poznatky zoradené v istom poradí. Genetická metóda skúma dejiny matematiky z epistemologického hľadiska, skúma povahu *procesov, ktoré formovali a transformovali matematické poznanie*. Jedným z kľúčových poznatkov v tejto oblasti je poznatok, že matematika sa zrodila z dialógu. Ako ukázal Árpád Szabó, väčšina technických termínov metodológie matematiky zavedených v antickom Grécku (termínov ako *problém*, *hypotéza*, *dôkaz*, *definícia*) má pôvod v *eristike*, teda v umení viesť dialóg.

Genetický konštruktivizmus nestojí pred dilemou personálneho či sociálneho konštruktivizmu, ako sú diskutované v literatúre (pozri časť 2.1). Epistemologické analýzy tvoriace pozadie genetickej metódy neumožňujú ísť cestou *personálneho konštruktivizmu*, lebo matematika sa zrodila z dialógu, dôkaz vznikol ako dialóg s pomyselným oponentom, definícia je výsledkom sociálneho vyjednávania a objavovanie predpokladá jazyk a možnosť komunikácie. Predstava, že izolovaný subjekt dospeje k idey dôkazu a vytvorí axiomatickú metódu, je absurdná. Sám sebe človek nemusí nič dokazovať – matematika však stojí na dôkaze, čo znamená, že matematika nie je dielom izolovaného subjektu. Genetická metóda zatvára aj cestu *sociálneho konštruktivizmu*, lebo matematika nie je diskurz, dôkaz určitého tvrdenia buď platí, alebo neplatí – o tom netreba diskutovať. Dialóg sa v určitom okamihu preklopí vo vecnú argumentáciu, ktorá má charakter logickej nevyhnutnosti. Je to práve presvedčivosť nevyhnutných logických argumentov, ktorá je nositeľom konsenzu v matematike, a nie sociálne konvencie. Keď matematiku vnímame z genetického hľadiska, mnohé psychologické a pedagogické tézy, ktoré bez genetického kontextu pôsobia radikálne, nepresvedčivo až kontroverzne, *strácajú radikálnosť, získavajú na presvedčivosti a prestávajú pôsobiť kontroverzne*.

Hejného metóda je ojedinelá, lebo je autenticky zakotvená ako v matematickej skúsenosti (jej autor bol, aspoň po krátku dobu, tvorivým matematikom), tak aj v intímnej znalosti detskej psychiky (Hejný dlhé roky učil na základnej škole). Tým sa líši od mnohých koncepcií didaktiky matematiky, v ktorých sú deti často učené *mŕtvu a odcudzenú matematiku* (formálne definície a postupy, ktoré nemajú kontakt s detským svetom). Na rozdiel od nich sa Hejný usiluje udržať *živý kontakt s autentickou matematickou skúsenosťou*. To má spoločné s didaktikmi hnutia *New Math* z šesťdesiatych rokov minulého storočia, čo boli tiež tvoriví matematici, ktorí chceli do školy vrátiť živú, autentickú matematiku. Hejný sa však od nich odlišuje tým, že nepomerne lepšie pozná psychiku detí. To je dôvod, prečo sa stretáva s neporozumením ako zo strany matematikov (pre ktorých je nepochopiteľná vágnosť a pomalé tempo zavádzania pojmov – tam kde je možné dať presnú a stručnú definíciu, Hejný uvádza neprehľadné množstvo príkladov, ktoré označuje čudným termínom *izolované modely*), tak aj detských psychológov (tam, kde by oni žiakov efektívne naučili jednoduché pravidlo, prípadne celú tabuľku násobenia, a tým im poskytli presné poznatky, o ktoré sa môžu oprieť, Hejný trvá na tom, že žiaci si na veci musia prísť sami v zdĺhavom procese pokusov a omylov). Napriek tomu je autor tejto state presvedčený, že Hejného metóda je správna. Nezrodila sa zo dňa na deň. Jej korene siahajú do minulého storočia a jej prvým programovým dokumentom boli *Pracovné materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematikov* (Hejný & Hejný, 1977/2012).

## 1.1 Princíp epistemickej blízkosti matematiky[3]

Tento princíp hovorí, že matematika je prístupná bezprostrednej skúsenosti a autentický matematický poznatok sa rodí výlučne z *vlastných skúseností* žiaka nadobudnutých v procese *jeho poznávacích aktivít* v kontakte s poznávanou *matematickou realitou*.[4] V tom sa matematika zásadne odlišuje od ostatných predmetov, ako sú napríklad zemepis alebo dejepis, kde žiak nemôže získavať poznanie vlastnou skúsenosťou s poznávanou geografickou alebo historickou realitou, ale musí sa opierať o poznatky získané nepriamo, prostredníctvom komunikácie. Matematické poznanie naproti tomu nie je možné odovzdať v hotovej forme, nie je možné si ho osvojiť pamäťovým učením hotových poznatkov, ale iba vlastnou poznávacou činnosťou, bezprostredným kontaktom so svetom matematiky. To je príčina, prečo sa genetický konštruktivizmus hlási ku konštruktivizmu.

Princíp epistemickej blízkosti vyplýva zo špecifickej povahy matematiky. Matematiku, matematické objekty a vzťahy totiž nosíme v sebe.[5] Túto skutočnosť ilustroval Henri Poincaré na príklade euklidovského priestoru (Poincaré, 1902). Euklidovský priestor nie je priestorom vizuálnych skúseností, lebo vizuálny priestor je

---

[3] Epistemický je v rovnakom vzťahu k epistemologickému ako psychický ku psychologickému (a ontický k ontologickému). Psychické javy sú javy duševného života, ktoré skúma (vedná) disciplína zvaná psychológia. Podobne epistemológia či ontológia sú (filozofické) disciplíny, ktoré skúmajú epistemické a ontické javy.

[4] Pojem epistemickej blízkosti je určitým zovšeobecnením atribútov, ktorými zvykne byť matematické poznanie charakterizované, ako sú intuitívnosť, zrejmosť, či jasnosť. Tieto atribúty spájajú čosi, čo možno označiť ako plnohodnotnú, bezprostrednú prístupnosť či autentický kontakt s matematickou realitou s metaforou zrakového vnímania. Podľa Hejného hrá vedľa zraku v matematickom poznávaní dôležitú úlohu hmat, motorika a ďalšie telesné metafory. Termínom epistemická blízkosť sa snažíme poznávanie vymaniť zo zajatia zrakovej metafory (zdedenej z platonizmu) a naznačiť, že keď si dieťa za chrbtom počíta na prstoch súčet 7 a 5, má plnohodnotný, bezprostredný, autentický kontakt s matematickou realitou v súlade s princípom epistemickej blízkosti.

[5] Samozrejme, nie úplne do všetkých detailov a nie všetky, ale mnohé a do veľkej miery. Veríme, že matematika poznáva reálny svet (viď Kvasz, 2015). Pri poznávaní tohto sveta však dochádza k neustálemu spredmetňovaniu a následnej interiorizácii matematických objektov a vzťahov. Vďaka interiorizácii možno matematické problémy riešiť v hlave. V tomto zmysle si matematiku nosíme vždy so sebou. Nie ako pamäťové stopy, ako nosíme so sebou tvar Afriky či vôňu čpavku. Matematické objekty nosíme so sebou bezprostredne, autenticky a plnohodnotne, ako keby sme mali v hlave skutočnú Afriku a kvapku skutočného čpavku.

nehomogénny (periférne videnie je menej ostré), ohraničený (voľným okom vidíme iba do určitej vzdialenosti) a dvojrozmerný (vzniká z priemetu na sietnici). Naproti tomu, euklidovský priestor je homogénny, neohraničený a trojrozmerný. Podobne euklidovský priestor nie je ani priestorom taktilnej či motorickej skúsenosti. Euklidovský priestor je priestorom, ktorý integruje vizuálny, taktilný a motorický priestor do celku pomocou grupy kompenzačných transformácií. Grupa kompenzačných transformácií je súčasťou našej psychosomatickej výbavy. Euklidovský priestor vzniká spredmetnením tejto grupy. Matematické pojmy teda vznikajú v procese *spredmetňovania aktivít* (motorických alebo symbolických). Preto čísla, grupy či fázové toky máme vždy so sebou ako (spredmetnenú) súčasť nášho telesného a symbolického bytia vo svete.

V tomto ohľade sa matematika zásadne odlišuje od predmetov ako sú geografia, chémia, biológia či dejepis. Afrika, čpavok, krava, či Karol štvrtý nevznikli spredmetnením našich telesných alebo symbolických aktivít, preto tieto objekty nemáme vždy so sebou, a tak si ich nemôžeme „osahať“ kedykoľvek sa nám zachce. Naproti tomu, číslo 235, grupu $S_4$ alebo hyperbolický kosínus si nosí každý, kto si ich raz spredmetnil, navždy so sebou. Na rozdiel od matematiky, geografiu, chémiu, biológiu či dejepis sa dieťa nemôže učiť z vlastnej skúsenosti. Bolo by absurdné chcieť učiť zemepis Afriky tým, že deti zoberieme do púšte, na savanu, do džungle a necháme ich zažiť autentický kontakt so všetkými geografickými javmi, ktoré ich chceme naučiť. V prípade matematiky však nie je nič jednoduchšie, ako si sprítomniť číslo 235 pomocou jeho dekadického zápisu, grupu $S_4$ pomocou štandardného zápisu permutácií v tvare $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, či hyperbolický kosínus pomocou jeho radu a nechať dieťa zažiť autentický kontakt s príslušným číslom, grupou či funkciou.

Preto konštruktivizmus nie je úletom nekonformných pedagógov, ale dôsledkom povahy samotnej matematiky. Pretože matematické objekty *vznikli spredmetnením motorických, mentálnych, symbolických a ikonických operácií*, nie je možné si ich pamäťovo osvojiť. Pamäťovým učením nedochádza ku spredmetneniu matematických objektov v mysli žiaka, preto, keď sa žiak učí matematiku spamäti, nevie, o čom hovorí. Je možné, že v kontexte konkrétnej látky bude schopný zodpovedať otázky učiteľa a vyriešiť štandardné úlohy, ale pretože nedôjde ku spredmetneniu príslušných matematických objektov (ale iba k zapamätaniu niektorých ich vlastností a vzťahov), žiak nebude schopný porozumieť ďalším vzťahom, ktoré sa zakladajú na spredmetnení, ktoré vynechal.

Vyučovanie matematiky je prirodzené založiť na báze spredmetňujúcich aktivít. Preto v rámci genetického konštruktivizmu princíp epistemickej blízkosti matematiky chápeme ako vyjadrenie prirodzeného stavu vecí, a nie ako nejaké didaktické rozhodnutie. Vždy, keď sa dieťa plnohodnotne oboznámi s určitým matematickým javom, objektom, či faktom, oboznámi sa s ním vďaka a v rámci vlastnej aktívnej činnosti. Samozrejme, dieťa sa môže začať matematiku učiť ako zemepis, ako rozprávanie o vzdialených krajinách (čísel, geometrických útvarov či algebraických štruktúr). Môže sa mnohé správy „cestovateľov“ (teda matematikov, ktorí číslo 234, grupu $S_4$ alebo hyperbolický kosínus skutočne videli) naučiť naspamäť a rozprávať ich s podobným zaujatím ako samotní cestovatelia. Ale je to zbytočné, lebo matematickú krajinu môže mať stále u seba, a môže do nej kedykoľvek nazrieť.

Epistemickú blízkosť matematiky si ľudia uvedomujú od čias antiky. V rôznych filozofických systémoch dostala rôzne teoretické zdôvodnenia. Je jej venovaný Platónov dialóg *Menon* (Platón, 1992), Descartes bol presvedčený o vrodenosti matematických ideí, Kant obhajoval tézu o apriórnosti matematiky, Frege naopak považoval matematiku za analytickú. Pozoruhodnú formuláciu princípu epistemickej blízkosti možno nájsť u Heideggera, ktorého určite nemožno podozrievať z predpojatosti v prospech matematiky: „matematično je to na veciach, čo vlastne už poznáme, čo teda nezískavame až z vecí, ale istým spôsobom sami už prinášame so sebou“ (Heidegger, 1987, s. 83). „Matematično je to zjavné na veciach, v ktorom sa vždy už pohybujeme, podľa čoho ich zakúšame vôbec ako veci...“ (Heidegger, 1987, s. 84).[6]

### 1.2 Princíp ontickej záväznosti matematiky

Mnohí, ktorí nikdy v krajine matematiky nepobývali a poznajú ju iba z rozprávania učiteľov alebo „cestovateľov“, tomu asi nebudú chcieť uveriť (a to je jedným z hlavných zdrojov nedôvery ku konštruktivizmu), ale to na veci nič nemení. Matematická krajina je v našom vnútri. V tom sa krajina matematiky podobá *krajine jazyka*. Pre každého rodeného hovorcu sa krajina jeho materského jazyka rozprestiera v jeho vnútri. Preto by sa mohlo zdať, že násobilku sa neučíme ako zemepis, ale skôr ako vybrané slová, teda ako upresňovanie a stabilizáciu spontánneho jazykového prejavu. Matematika sa však od materinského jazyka odlišuje tým, že aj keď sa matematické objekty rodia spredmetnením *našich* motorických, mentálnych, symbolických či ikonických operácií, tieto operácie majú faktický obsah. Ich správnosť je *vecná*. To, že aké i sa píše v slove býk sa nedá zistiť skúmaním sveta, je to jazyková konvencia, ktorá sa zrodila niekedy dávno v niektorom zo staroslovanských jazykov. Nie sú pre to žiadne vecné dôvody, pokojne by sa slovo býk mohlo písať s mäkkým i.[7] Naproti tomu to, že koľko je 234 krát 52 je dané vecne. Samozrejme, dekadický pozičný číselný systém je vecou konvencie. Konvenciou však nie aritmetický fakt, ktorý s jeho pomocou vypočítame. V každom aritmetickom systéme, ktorý ľudstvo vytvorilo, to vyjde rovnako. To znamená, že matematické operácie (počítanie, konštruovanie, transformovanie) vznikajú ako *zvnútornenie určitých vecných súvislostí*, teda ako zabudovanie týchto vecných súvislostí do telesných procedúr, mentálnych aktivít, symbolických systémov či nástrojov ikonickej reprezentácie.

Preto aj keď matematické javy, predmety a fakty *máme vždy a všade so sebou*, tieto javy, predmety a fakty nie sú našim výtvorom v tom zmysle, ako sú ním lingvistické javy (ako pády, rody, časy; fonémy, morfémy, slová, vety). Matematické

---

6 Termínom *epistemická blízkosť* označujeme to, čo uvedení filozofi nazvali *evidentnosť*, *apriórnosť*, *vrodenosť* či *analytickosť*. Ako tento jav filozofi zdôvodňujú, to pre nás teraz nie je dôležité. Uvedené teórie však dokladajú výnimočný charakter matematického poznania, ktorý plne oprávňuje výnimočný prístup k jej vyučovaniu, označovaný ako konštruktivizmus.

7 Pravopis teda, na rozdiel od matematiky, podlieha princípu sociálnej a nie ontickej záväznosti.

javy, predmety a fakty sa zrodili *spredmetnením* operácií (telesných, mentálnych, symbolických a ikonických), ktoré zas vznikli *zvnútornením* vecných súvislostí. Každé spredmetnenie prináša nový súbor vecných súvislostí medzi spredmetnenými javmi, objektmi a vzťahmi, ktorých zvnútornením vzniká nový súbor činností, ktorý vedie k novému spredmetneniu. Táto *súhra spredmetnení* (vytvárajúcich *epistemickú blízkosť matematických javov, objektov a vzťahov* – teda to, že si na ne môžeme kedykoľvek siahnuť) a *zvnútornení* (vytvárajúcich *ontickú záväznosť matematického poznania* – teda nárok na faktickú pravdivosť a nie len konvenčnú zhodu) odlišuje matematiku od ostatných predmetov. Od predmetov ako zemepis, chémia, či biológia, ktoré majú rovnakú ontickú záväznosť svojho poznania, sa matematika odlišuje svojou *epistemickou blízkosťou*; kým od materinského jazyka, ktorý má podobnú epistemickú blízkosť, sa matematika odlišuje svojou *ontickou záväznosťou*.

Princíp ontickej záväznosti sa do genetického konštruktivizmu premieta tým, že deti necháva manipulovať s reálnymi predmetmi, stavať rôzne útvary zo skutočných kociek, počítať skutočné predmety svojho okolia, aby matematika vyrástla z priameho kontaktu so skutočnosťou (teda tým, čo *onticky je*). Samozrejme, bolo by jednoduchšie naučiť sa spamäti, že 3 krát 4 je 12 než neustále prepočítavať 3 kôpky po 4 predmetoch. Podľa princípu ontickej záväznosti by sme ale postupovali nesprávne, lebo by sme matematiku kotvili sociálne, v autorite toho, kto prehlásil, že 3 krát 4 je 12. To, že 3 krát 4 je 12 platí nezávisle od toho, či niekto niečo prehlási, ono je to onticky záväzný fakt. Deti to nesmieme naučiť my, oni sa to musia naučiť samé, musí ich k tomu doviesť skutočnosť. Keď im to prezradíme, tak ich vlastne klameme, lebo zastierame zdroj matematickej pravdy. Tým zdrojom nie sme my, nie sú ním ľudské konvencie, ale skutočnosť sama.

Podobne, ako princíp epistemickej blízkosti matematiky, aj princíp jej ontickej záväznosti bol sformulovaný už v staroveku. To, že matematické poznatky vznikajú abstrakciou z reálnych vzťahov materiálnych predmetov,[8] a teda ich platnosť má ontickú záväznosť, si myslel Aristoteles i Galileo Galilei, ktorý to vyjadril slovami:

> Filozofia je napísaná v tejto veľkej knihe, univerze, ktorá je stále otvorená nášmu pohľadu. Ale tejto knihe nemožno porozumieť, ak sa nenaučíme chápať jazyk a čítať písmená, pomocou ktorých je napísaná. Napísaná je v jazyku matematiky, a jej písmenami sú trojuholníky, kružnice a ostatné geometrické útvary, bez ktorých nemožno porozumieť jedinému slovu (Galilei, 1623/1957, s. 237–238).

Nedávno tento názor v radikálnej forme sformuloval Vladimír Igorevič Arnoľd[9] na prednáške v Paríži 7. marca 1997:

> Matematika je časťou fyziky. Fyzika je experimentálnou vedou, časťou prírodných vied. Matematika je tou časťou fyziky, kde sú experimenty lacné. Jacobiho identita (ktorá núti výšky trojuholníka pretnúť sa v jednom bode) je experimentálny fakt rovnako ako to, že Zem je guľatá (to jest homeomorfná so sférou). Ale možno to objaviť s menšími nákladmi. (Arnoľd, 1998, s. 229)

[8] To samozrejme neznamená, že by sa matematické poznanie dalo týmito vzťahmi aj zdôvodniť.

[9] Jedna z veľkých postáv matematiky 20. storočia.

### 1.3 Princíp inštrumentálneho ukotvenia matematických poznatkov

Podľa *princípu epistemickej blízkosti* sú malé čísla, jednoduché geometrické útvary či jednoduché algebraické vzťahy bezprostredne prístupné poznaniu. Veľké čísla, zložité geometrické konfigurácie či komplexné algebraické vzťahy však už nie sú bezprostredne prístupné. Na ich poznávanie matematika vytvára reprezentačné nástroje, pomocou ktorých je možné tieto čísla, útvary či vzťahy priblížiť (a tak *obnoviť platnosť princípu epistemickej blízkosti*). Tieto nástroje sú dvoch druhov – *symbolické*, ako napríklad dekadická číselná sústava, ktorá je schopná pomocou krátkeho výrazu vyjadriť obrovské čísla, a *ikonické*, ako napríklad konštrukcie pomocou kružidla a pravítka, ktoré sú pomocou presného umiestňovania čiar na papieri schopné vyjadriť pomerne zložité geometrické vzťahy. Nástroje symbolickej a ikonickej reprezentácie sú artefakty – ľudské výtvory. Sú však vytvorené tak, aby zohľadňovali princíp ontickej záväznosti. To napríklad znamená, že syntaktické pravidlá číselných systémov sú zvolené tak, aby výsledky symbolických manipulácií boli v zhode s aritmetickou realitou. Veľká časť vyučovania matematiky spočíva v osvojení si týchto nástrojov a v nácviku ich používania pri odhaľovaní rôznych aspektov matematickej skutočnosti.

Jednotlivé nástroje prepožičiavajú nášmu mysleniu obrovskú účinnosť. Ako príklad môžeme vziať násobenie päťmiestnych čísel, čo pre najmenšie päťmiestne čísla 10 000 x 10 000 dáva výsledok 100 000 000. Predstavme si kmeň, ktorý nemá žiaden symbolický nástroj na reprezentovanie čísel, a počíta pomocou fazuliek (kamienkov, mušlí či niečoho podobného). Náčelník kmeňa sa stavil, že jeho ľudia dokážu vynásobiť dve čísla, ktoré biely muž zapisuje pomocou toľkých znakov, ako má chlap prstov na jednej ruke. Urobí to tak, že za dedinou dá splanírovať dostatočne veľké pole (aspoň 100 krát 100 metrov). Zoberie dve vrecia, do ktorých nechá odpočítať počty fazuliek, zodpovedajúce číslam, ktoré treba vynásobiť, dá nakresliť dostatočne dlhú rovnú čiaru a v centimetrových odstupoch dá na ňu umiestniť fazuľky z prvého vreca. Potom dá nakresliť dostatočne dlhú (približnú) kolmicu a na tú nechá v centimetrových odstupoch umiestniť fazuľky z druhého vreca. Nariadi členom kmeňa, aby doplnili pole do štvorčekovej siete fazuliek. Keď to urobia, nechá všetky fazuľky pozametať na kopu, naložiť na somárov a odniesť do krčmy ako výsledok násobenia. To je pekné, ak však budeme predpokladať, že položenie jednej fazuľky trvá sekundu, bude poukladanie 100 000 000 fazuliek trvať viac než tri roky (1 rok má $3{,}15 \times 10^7$ sekúnd). Samozrejme, ukladať fazuľky môže niekoľko ľudí súčasne, ale aj keby ich bolo 100 (teda prakticky celý kmeň), stále by to trvalo 10 dní pri práci vo dne i v noci. 100 ľudí by si asi prekážalo, takže realistický odhad časovej náročnosti násobenia dvoch päťciferných čísel bez použitia aritmetickej symboliky je niekoľko mesiacov. Keby sme namiesto päťciferných čísel vzali čísla šesťciferné, počítanie by sa stonásobne predĺžilo, takže je zrejmé, že násobenie pomocou fazuliek má svoje medze.

V rímskych číslach násobenie päťciferných čísel ide lepšie, ale stále to nie je nič príjemné. Na zápis päťciferného čísla potrebujeme v rímskej notácii v priemere desať znakov. Keďže sa násobí každý s každým, dostaneme zhruba 100 znakov výsledku (oproti 100 000 000 fazuľkám), ktoré treba pozlučovať (desiatky s desiatkami, stovky so stovkami, atď.). Vypočítať pomocou rímskych čísel π na 60 desatinných miest (ako to urobil Euler) však už pripomína úsilie náčelníka z predošlého príkladu. Vidíme, že aritmetické poznatky zásadným spôsobom závisia od nástroja symbolickej reprezentácie.

Genetický konštruktivizmus kladie veľký dôraz na nácvik práce s reprezentačnými nástrojmi, ktorým hovorí *prostredia*. Naučiť deti manipulovať so symbolmi či geometrickými reprezentáciami najrozličnejších druhov je pre matematiku zásadné. Matematické poznanie je inštrumentálne ukotvené a zbehlosť v inštrumentálnej praxi zásadným spôsobom rozširuje dostupné poznatky. Ale ako ukazuje príklad domorodého kmeňa, tie najjednoduchšie poznatky sú prístupné aj bez akéhokoľvek nástroja.

V matematike existuje súbor kanonických reprezentačných nástrojov ako dekadická pozičná sústava, systém zápisu zlomkov či polynómov. Klasická didaktika matematiky často zamieňa učenie sa *matematiky* s osvojovaním si technických jemností určitého *nástroja*. Napríklad v dekadickej číselnej sústave máme desať základných znakov, z ktorých multiplikatívnej tabuľky (nazývanej *malá násobilka*) možno odvodiť všetky ostatné vzťahy. To zvádza didaktikov, aby túto tabuľku pokladali za čosi fundamentálne, čoho výuke je potrebné venovať zvýšenú pozornosť. Čísla však nie sú totožné s ich dekadickým zápisom. To, že máme na rukách spolu 10 prstov, je evolučná náhoda, ktorá nijako neovplyvňuje matematické fakty. Keby sme na rukách mali 8 prstov, fungovala by malá násobilka inak. 7 krát 6 by sme nepísali ako 42 (4 x 10 + 2 x 1) ale ako 52 (5 x 8 + 2 x 1). Preto učiť sa naspamäť malú násobilku nie je poznávaním matematickej skutočnosti, ale osvojovaním si pravidiel určitého symbolického nástroja. To isté platí o počítaní so zlomkami, úpravách výrazov alebo o riešení rovníc. Úsilie vložené do nácviku práce s príslušným symbolickým nástrojom môže viesť krátkodobo k úspechu, lebo pamäťový záznam je jednoduchší než mentálna reprezentácia, ale pri každom posune kontextu pamäťové učenie zastiera matematiku, lebo matematický fakt nahradzuje jeho kontextovo závislou reprezentáciou. *Matematiku sa nemožno naučiť naspamäť, možno ju iba pochopiť*.

Genetický konštruktivizmus namiesto výcviku práce s konkrétnym reprezentačným *nástrojom* zavádza veľké množstvo rôznych *prostredí* a učí deti tú istú situáciu vyjadriť v rôznych prostrediach. Tým predchádza tomu, aby si deti zamieňali pravidlá fungovania (náhodne zvoleného a konvenčne vybudovaného) nástroja s matematickou realitou, ktorú pomocou neho poznávajú. Tento aspekt genetického konštruktivizmu často vyvoláva negatívne reakcie u učiteľov a rodičov. Učitelia i rodičia majú matematické obsahy pevne zviazané s ich kanonickou reprezentáciou a tak nechápu, čo vlastne deti v danom prostredí robia, na čo im to bude a kedy sa konečne začnú učiť „skutočnú" matematiku (teda cvičiť sa v práci so štandardnými reprezentáciami). Je zaujímavé, že na rozdiel od predošlých dvoch princípov, u ktorých sme boli schopní uviesť rad filozofov zvučných mien, ktorí príslušný princíp zastávali, princíp inštrumentálneho ukotvenia matematických poznatkov nie je v literatúre diskutovaný. Výklad inštrumentálneho ukotvenia matematiky je uvedený v knihe (Kvasz, 2015).

### 1.4 Princíp jednoty matematiky

Aj napriek tomu, že v matematike používame celý rad reprezentačných nástrojov, *matematika je jedna*. Jednota matematiky sa prejavuje nečakanými a prekvapivými súvislosťami, ktoré sa objavujú medzi zdanlivo nesúvisiacimi, rôznorodými prvkami. Tak pojem grupy zaviedol Evariste Galois, keď sa snažil pochopiť, prečo pre *algebraické rovnice* piateho stupňa neexistuje vzorec na ich riešenie. Dôvodom je, že alternujúca grupa piatich prvkov nemá žiadnu normálnu podgrupu. Asi o štyridsať rokov neskôr Felix Klein vytvoril jednotiaci pohľad na *geometriu* pomocou pojmu grupy. Ukázal, že jednotlivé geometrie – euklidovskú geometriu, afinnú geometriu, projektívnu geometriu, Bolyai-Lobačevského geometriu, etc. – možno chápať ako štúdium invariantov euklidovskej, afinnej, projektívnej, etc. grupy. Pritom aj keď sa euklidovská a Bolyai-Lobačevského geometria navzájom vylučujú (priestor môže byť buď euklidovský alebo neeuklidovský, ale nemôže byť oboje súčasne), zodpovedajúce grupy koexistujú v harmónii ako podgrupy projektívnej grupy. Klein bol schopný sformulovať otázku, koľko geometrií je vôbec možných – v jeho pojatí geometrie sa táto otázka redukuje na problém, koľko podgrúp má projektívna grupa. A opäť o niekoľko rokov neskôr, keď sa Henri Poincaré snažil porozumieť určitým *funkciám komplexnej premennej*, ktoré dnes nazývame automorfnými funkciami, kľúčovým krokom bolo poznanie, že tieto funkcie majú určité symetrie, ktoré tvoria grupu, a táto grupa je izomorfná grupe transformácií Bolyai-Lobačevského roviny. Skutočne nečakaná a prekvapivá súvislosť medzi geometriou a funkciami komplexnej premennej. Príklad grupy je pôsobivý, ale bolo by možné uviesť celý rad podobných pojmov, ktoré sa vyskytujú krížom naprieč jednotlivými matematickými disciplínami a teóriami a ilustrujú jednotu matematiky.

Genetický konštruktivizmus ponúka deťom množstvo rôznych nástrojov (prostredí) a necháva, aby si pri riešení určitého problému samé zvolili cestu. Používaním rozličných nástrojov v kontexte jedinej úlohy (u rôznych detí v triede) dochádza pri následnej diskusii riešení k ich prepojeniu. Pritom zvlášť dôležitý druh prepojenia je *prepojenie symbolických a ikonických (teda geometrických) nástrojov*. Deti treba viesť k tomu, aby sa naučili symbolicky vyjadriť čo vidia a vizualizovať čo majú symbolicky zapísané. Preto v rámci genetického konštruktivizmu sa školská matematika nedelí na aritmetiku, geometriu a algebru. Potrebné je neustále prepájať algebraické úpravy s ich geometrickou interpretáciou a naopak. Preto počítanie a pohyb po číselnej osi, či násobenie záporným číslom a otočenie, sú v Hejného metóde nerozlučne prepojené.

Ako ukazuje príklad s fazuľou, nie každý nástroj je rovnako efektívny. Preto je po určitom čase potrebné, aby trieda „skonvergovala" k viac-menej štandardnej symbolike a terminológii. Deti však žijú v jazykovom prostredí, ktoré je presiaknuté matematikou, takže v triede sa spravidla nájde niekto, kto navrhne používanie štandardného termínu či symbolu. A potom stačí, aby ho učiteľ zvýraznil a upozornil naň ostatné deti. Je však dôležité, aby zjednotenie terminológie prišlo až potom, ako došlo ku zjednoteniu samotného obsahu.

Genetický konštruktivizmus sa týka toho, ako učiť. V tom, čo sa má učiť, akceptuje závery klasickej didaktiky matematiky. Teda keď si spoločnosť (reprezentovaná potrebami štátu, objednávkou priemyslu alebo inštitucionálnou tradíciou) želá, aby žiaci pri opustení základnej školy vedeli deliť zlomky, tak genetický konštruktivizmus toto rozhodnutie plne rešpektuje. Z hľadiska toho, čo sa má učiť, je genetický konštruktivizmus neutrálny. Keď sa však ujasní, čo má žiak vedieť na konci výukového procesu, nastupuje *historická analýza cieľa*, v rámci ktorej sa identifikujú hlavné etapy na ceste, po ktorej matematika dospela k danému poznatku. Keď sa pozrieme na Hejného učebnice očami historika matematiky, nájdeme v nich veľké množstvo skrytej, implicitnej histórie matematiky. Každý poznatok, ktorý chce dieťa naučiť, je rozložený do série krokov opakujúcich históriu jeho objavu.

Túto *implicitnú ukotvenosť v histórii matematiky*, vtelenú do voľby a radenia úloh, si väčšina čitateľov Hejného učebníc neuvedomuje. Učebnice pôsobia na prvý pohľad rovnako ako učebnice radikálneho konštruktivizmu, v ktorých majú deti všetko objaviť samé. Tento dojem je síce správny, ale zachytáva iba zjavný povrch učebníc. Pod týmto povrchom, a v tom sa genetický konštruktivizmus radikálne odlišuje od ostatných foriem konštruktivizmu (vrátane radikálneho), je pevné, presné a nesmierne bohaté historické podložie. Výber problémov a ich vzájomné radenie *kopíruje proces historickej genézy matematického poznania*. V tomto smere je formatívna sila učebníc neporovnateľne vyššia než o akej môže snívať učiteľ v klasickej škole. Ten, keď žiakom vysvetľoval určitý poznatok, niektorí mu rozumeli, iní na to neboli pripravení a pre ďalších to bolo úplne mimo ich kognitívneho dosahu. V prípade Hejného metódy sú (v ideálnom prípade) všetky kroky, ktoré v histórii viedli k objavu určitého poznatku, prítomné a sú vtelené do podoby *série gradovaných úloh*. Žiak, riešiac tieto úlohy, môže príslušný krok urobiť sám a tak rekapitulovať históriu objavu.

Aj keď je na hodinách aktivita ponechaná na žiakov, všetko podstatné, čo by tradičný učiteľ chcel a mal žiakom povedať, je v učebnici prítomné. Nie je to však prítomné vo forme hotového poznatku, ale vo forme otázok a problémov, ktoré k tomuto poznatku vedú. Preto aj keď na prvý pohľad vyzerajú Hejného učebnice veľmi odlišne od tradičných učebníc, z matematického hľadiska obsahujú (v ideálnom prípade) identickú látku. Namiesto učenia chápaného ako poúčanie je však táto látka súčasťou učenia chápaného ako objavovanie a vedeného pomocou *sérií gradovaných úloh*.

Význam histórie matematiky pre jej vyučovanie je všeobecne akceptovaný. Mnohé učebnice obsahujú portréty významných matematikov, ktorí sa podieľali na objavovaní preberanej látky spolu s informáciou o ich živote. Keď si však v týchto učebniciach pozrieme základné pojmy a ich definície, zistíme, že tieto dosť hrubo porušujú historický poriadok. To znamená, že historické vsuvky nie sú o veľa viac ako ornament, ktorým sa zdobí učebnica, ktorá svojím prístupom históriu matematiky ignoruje. Princíp historického ukotvenia matematiky, na ktorom stojí genetický konštruktivizmus, naproti tomu historický materiál nepovažuje za *ornament*, ktorým sa spestrí hotová učebnica po tom, ako bola napísaná, odskúšaná a dostala definitívnu stavbu, ale ako *pracovný nástroj*, ktorým začína analýza látky ešte predtým, než sa vyberú problémy a rozložia sa do sérií gradovaných úloh.

### 1.6 Princíp genetickej paralely

Princíp historického ukotvenia matematických poznatkov si všíma jednotlivé pojmy a izolované poznatky. Pre každý z nich hľadá postupnosť úloh, ktorá vedie k jeho osvojeniu. Poznanie však nie je tvorené izolovanými pojmami a poznatkami. Poznanie tvorí určitý celok, jednotlivé pojmy a poznatky sú určitým spôsobom prepojené a spoločne vytvárajú určitú štruktúru. V histórii matematiky okrem hromadenia jednotlivých pojmov a poznatkov dochádza občas aj k radikálnym zmenám celej pojmovej štruktúry. Takéto zmeny sú v literatúre opisované ako vedecké revolúcie, epistemické ruptúry či kognitívne zlomy. *Princíp genetickej paralely* hovorí, že každá zásadnejšia kognitívna premena v mysli žiaka prebieha spôsobom, ktorý je paralelný tomu, ako sa táto premena odohrala v historickom vývine matematiky. Kognitívne premeny vo vývine (a osvojovaní si) matematiky sú viacerých druhov, pričom tu opíšeme tri druhy.

Asi najradikálnejšia kognitívna premena je spojená so *vznikom dôkazu* a na ňom založenej deduktívnej metódy ako poznávacej metódy charakteristickej pre celú matematiku. Ku zrodu dôkazu došlo v starovekom Grécku niekedy na rozmedzí šiesteho a štvrtého storočia pred naším letopočtom a bola to jedna z konštitutívnych premien západnej civilizácie. Ako ukázal významný filológ a historik matematiky Árpád Szabó v knihe *Beginnings of Greek Mathematics* (Szabó, 1978), deduktívna metóda s veľkou pravdepodobnosťou vyrástla z podhubia *eristiky* – umenia viesť spor. Tento poznatok má zásadný význam pre celú didaktiku matematiky, lebo ukazuje, že vznik deduktívnej metódy má sociálne korene – deduktívna metóda sa zrodila z kultúry verejnej diskusie v antickej spoločnosti. Princíp genetickej paralely aplikovaný na tento prípad hovorí, že na to, aby sme v mysli žiakov dosiahli kognitívnu premenu spočívajúcu v schopnosti jasne odlíšiť logicky platný argument od argumentu neplatného, musíme na hodinách matematiky navodiť a rozvíjať kultúru vecnej diskusie, pri ktorej sa žiaci učia samostatne formulovať argumenty, posudzovať ich presvedčivosť a dospievať ku konsenzu pomocou sily argumentov. Toto je príčina, prečo jednou zo zásad Hejného metódy je dôraz na kolektívne poznávanie. Teda tu opäť nejde o svojvoľný výmysel autora genetického konštruktivizmu, ale o rešpektovanie zákonitostí genézy poznania. Učiteľ sa drží v pozadí a necháva žiakov diskutovať o problémoch, lebo iba tak (teda za nezasahovania autority) môžu zažiť a osvojiť si rozdiel medzi platným a neplatným argumentom.

Druhým typom kognitívnych zmien je vznik určitého *nástroja symbolickej alebo ikonickej reprezentácie*. Z hľadiska základnej školy sú relevantné tri nástroje – dva symbolické (dekadická pozičná sústava a algebraická symbolika) a jeden ikonický (konštrukcie pomocou pravítka a kružidla). Princíp genetickej paralely aplikovaný na tieto prípady vyžaduje preskúmať ako došlo ku vzniku a zavedeniu týchto nástrojov v histórii a pokúsiť sa porozumieť motivácii, kontextu, metaforám a hlavným etapám tohto procesu. Keď sa pozrieme na prípad algebry, zistíme, že symbolická algebra bola až treťou formou algebry. Historicky najstaršou formou algebry bola takzvaná *rétorická algebra*, v rámci ktorej sa rovnice zapisovali pomocou zložených súvetí prirodzeného jazyka a ich riešenie sa zadávalo vo forme tzv. *regule*, teda pravidla sformulovaného v prirodzenom jazyku, ktoré umožňovalo určiť hodnotu neznámej. Každý, kto by si myslel, že to bolo bezvýznamné alebo krátke obdobie v dejinách algebry, sa hrubo mýli. Trvalo vyše 600 rokov (od počiatkov algebry u al-Chwárizmího v 8. storočí až po Girolama Cardana v 16. storočí) a medzi jeho hlavné výsledky patrí vyriešenie rovnice tretieho stupňa.[10] Cardano kubické rovnice zapisoval v tvare „Kubus a veci sú rovné číslu“.[11] Riešenie udával vo forme regule:

> Umocni na tretiu jednu tretinu počtu vecí, pridaj k tomu štvorec polovice čísla rovnice a vypočítaj druhú odmocninu z tohto celku. Toto zduplikuj a k jednej z dvoch pridaj polovicu čísla rovnice a od druhej odčítaj polovicu toho istého. Potom budeš mať binomium a jeho apotome. Potom odčítaj tretiu odmocninu apotome od tretej odmocniny binomia, zvyšok, ktorý ostane je vec.

Vidíme, že riešenie rovnice tretieho stupňa sa dá zapísať bez použitia akejkoľvek symboliky. Po rétorickej algebre nastupuje tzv. *synkopická algebra*, v ktorej boli technické termíny nahradené ich prvými písmenami, takže napríklad *cubus* sa písal ako *c*, vec (*res*) ako *r* a podobne. Synkopická algebra sa po určitú dobu prekrývala s rétorickou algebrou, a rozšírená bola od 15. storočia po začiatok 17. Nakoniec v dielach Viéta a Descarta došlo ku vzniku *symbolickej algebry*, ktorá bola nakoniec na začiatku 20. storočia vystriedaná tzv. *abstraktnou algebrou*.

Príčina, prečo toto všetko uvádzame, je, aby sme upozornili na zásadný rozpor medzi históriou algebry a tým, ako je algebra vyučovaná v škole, kde výuku algebry spravidla začíname zavedením Descartových syntaktických konvencií *symbolickej algebry*. Princíp genetickej paralely pritom hovorí, že takýto prístup k vyučovaniu algebry je nesprávny. Vynechanie 600 rokov trvajúceho obdobia rétorickej algebry a 200 rokov trvajúceho obdobia synkopickej algebry je hlboká, zásadná a fatálna chyba. V priebehu tohto obdobia totiž došlo ku *spredmetneniu neznámej*, a konvencie symbolickej algebry sú práve konvencie na jej symbolický zápis. Preto sa v rámci genetického konštruktivizmu neodporúča, aby učiteľ zaviedol akúkoľvek konvenciu na označenie neznámej a vyžaduje sa trpezlivo čakať, kým u žiakov dôjde ku *spredmetneniu* tohto kľúčového matematického objektu. Samozrejme, nie je nič ľahšie, ako napísať na tabuľu *x*, ale nie je nič ťažšie, ako takýmto spôsobom dosiahnuť, aby žiaci tomuto symbolu sémanticky rozumeli a nielen ho bezmyšlienkovite používali.

[10] To je výsledok, ktorý prekračuje látku strednej školy, takže určite nemožno tvrdiť, že rétorická algebra bola čímsi triviálnym alebo banálnym.

[11] *Cubus et rebus equalibus numero*, kde *kubus* stojí za $x^3$; *vec* je $x$, teda *veci* sú $bx$; *číslo* je absolútny člen rovnice, teda $c$, takže uvedená formulácia je ekvivalentná našej rovnici $x^3 + bx = c$.

Zdá sa, že celý problém so slovnými úlohami má korene v príliš rýchlom zavádzaní konvencií na označenie neznámej v dobe, keď ešte v mysliach žiakov nedošlo ku *spredmetneniu* pojmu neznámej. Algebraickej symbolike potom chýba označovaná realita, a tak v mysliach detí nedôjde ku prepojeniu sémantickej roviny slovných úloh s rovinou algebraickej symboliky. V prípade aritmetiky a syntetickej geometrie (t. j. zvyšných dvoch reprezentačných nástrojov, ktoré vystupujú v učive základnej školy) sú problémy podobné – napred musí dôjsť ku spredmetneniu aritmetickej či geometrickej reality, aby reprezentačné nástroje, ktorých používanie sa na hodinách matematiky nacvičuje, mohli byť prepojené s niečím (pre žiakov) skutočným. Vznik a historický vývin jazyka algebry je opísaný v (Kvasz, 2008), kým didaktické súvislosti v práci (Kvasz, 2013a).

Tretím typom kognitívnych zmien v matematike sú jednotlivé vrstvy *spredmetnenia* (v Kvasz, 2008 označené termínom *relativization*), ku ktorým dochádza pri práci s určitým reprezentačným nástrojom. Prehrešky voči princípu genetickej paralely tu majú podobný charakter ako v predošlom prípade – vynechávanie celých vývinových štádií. V knihe *Patterns of Change* sme opísali osem štádií spredmetnenia vo vývine algebry. Asi najdrastickejším príkladom porušovania princípu genetickej paralely je však vyučovanie matematickej analýzy na vysokej škole. Matematická analýza v priebehu svojho vyše tristoročného vývoja prešla postupnosťou ôsmich štádií, podobne ako algebra. Tu niet miesta pre výklad dejín matematickej analýzy, preto sa pokúsime jednotlivé štádiá iba navodiť pomocou rokov a mien:[12]

I. **1630–1690**: Fermat, Wallis, Gregory, **Newton**, Leibniz
II. **1690–1740**: Jacob a Johann Bernoulli, **Taylor**, Euler
III. **1740–1780**: Daniel Bernoulli, **Euler**, d'Alembert
IV. **1780–1820**: Lagrange, Laplace, **Fourier**, Gauss
V. **1820–1860**: Bolzano, **Cauchy**, Abel, Dirichlet, Riemann
VI. **1860–1900**: Weierstrass, **Dedekind**, Jordan, Cantor, Poincaré
VII. **1900–1940**: Hilbert, **Lebesgues**, Frechet, Banach

Keď otvoríme štandardné učebnice matematickej analýzy (či už vysokoškolské alebo stredoškolské), základné pojmy tejto disciplíny – pojem derivácie a integrálu – sú v nich zavedené na základe pojmu limity, teda v duchu štádia V. Aby ich študenti mohli pochopiť, muselo v ich mysliach dôjsť ku spredmetneniu štyroch predchádzajúcich vrstiev (reprezentovaných kvôli jednoduchosti Newtonom, Taylorom, Eulerom a Fourierom). Po vynechaní štyroch vrstiev spredmetnenia študenti skutočne nemajú šancu výklad pochopiť a ostáva im jediné, naučiť sa látku naspamäť.

Asi prvou publikáciou, ktorá sa explicitne hlásila ku genetickému prístupu vo vyučovaní matematiky, bola posmrtne vydaná kniha Otta Toeplitza *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode* (Toeplitz, 1949). Teoretickým výkladom genetickej metódy je kniha Gerta Schubringa *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik* (Schubring,

[12] Uvedené roky sú orientačné a mená predstavujú vybrané osobnosti, v ktorých diele možno príslušný typ spredmetnenia identifikovať.

1978). Genetický konštruktivizmus spája genetický prístup k vyučovaniu matematiky s konštruktivistickým pojatím vyučovania, čím sa od týchto priekopníckych publikácií do veľkej miery odlišuje.

## 2 Odpoveď na niektoré kritiky konštruktivizmu

Ako sme uviedli v úvode, k napísaniu tejto state nás podnietili texty niektorých kolegov venované kritike konštruktivizmu. Po tom, ako sme vyložili princípy genetického konštruktivizmu, pokúsime sa ukázať, že veľká časť tejto kritiky sa zakladá na nedorozumení. Jej autori nepoznali historické a epistemologické základy genetického konštruktivizmu[13] a reagovali na to, čo bolo dostupné. Keď po výklade implicitných predpokladov genetického konštruktivizmu, prejdeme k rozboru kritických námietok, pokúsime sa oslabiť ich osteň a kritiku nahradiť konštruktívnym dialógom.

### 2.1 O konstruktivismu ve vyučování matematiky (Rendl, 2008)

Rozsiahly (37 stránkový) článok Miroslava Rendla sa rozpadá na dve časti. V úvodnej časti (strany 167–170) autor načrtáva celkový prehľad konštruktivistických prístupov a prezentuje kritiku domácich autorov Nade Stehlíkovej a Milana Hejného. Potom nasleduje vyše 30 strán textu venovaných rozboru a kritike amerických autorov Roberta B. Davisa a A. Maherovej (strany 171–202). V našom článku sa budeme venovať prvej časti Rendlovho článku, pretože kritika amerických autorov uvedená v druhej časti nám príde presvedčivá, a nemáme k nej výhrady.

Hneď v úvode svojej state Rendl odlišuje *personálny*, *sociálny* a *didaktický* konštruktivizmus. Bola to snaha odlíšiť Hejného prístup od týchto foriem konštruktivizmu, ktorá nás viedla k zavedeniu termínu *genetický konštruktivizmus* na označenie Hejného prístupu. Genetický konštruktivizmus určite nie je formou *personálneho konštruktivizmu*, ktorý Rendl charakterizuje presvedčením, že „každý jedinec dospieva ku svojim vlastným konštrukciám spôsobom pre druhých nezbadateľným a nezdeliteľným“ (Rendl, 2008, s. 167). Genetický konštruktivizmus považuje poznanie za výsledok procesu, prebiehajúceho v žiackom kolektíve, v ktorom žiaci o svojich konštrukciách diskutujú a navzájom si ich kritizujú. Robia to prostredníctvom jazyka matematiky, ktorý si osvojujú v sociálnych interakciách. Avšak genetický konštruktivizmus nie je ani formou *sociálneho konštruktivizmu*, ako tento charakterizuje Rendl – „Čo je v učive podstatné, čo sú podstatné súvislosti, ktoré má žiak pochopiť, by bolo pomeriavané len adaptáciou na diskurz, na zdieľané predstavy, nie tým, ako sa veci skutočne majú“ (Rendl, 2008, s. 168). Genetický konštruktivizmus akceptuje, že poznanie má ako individuálnu dimenziu (učiť sa učí koniec koncov vždy určité individuálne dieťa) tak aj sociálnu dimenziu (k učeniu dochádza v žiackom kolektíve prostredníctvom jazyka, ktorý je sociálnym výtvorom). Ale podstatné je, že tieto

[13] A ani ich nemali ako poznať, keďže ostávali do veľkej miery skryté.

dve dimenzie sa navzájom zjednocujú v procese kognitívnej genézy, vedúcej k objektívnemu matematickému poznaniu.

Teda pri vyučovaní prebiehajúcom v súlade s princípmi genetického konštruktivizmu dieťa nekonštruuje svojvoľné či náhodné personálne poznanie, ale pedagóg ho vedie po ceste historickej genézy matematického poznania – jeho personálna konštrukcia je *rekonštrukciou objektívneho obsahu historického procesu*, ktorého jednotlivé etapy mu postupne sprostredkováva učiteľ. Preto tu nejde o adaptáciu na nejaký diskurz – čo v matematike platí je objektívne a nemôže byť predmetom sociálneho vyjednávania. Sociálne sú nástroje poznávania (jazyk, symbolika), ale určite nie obsah. To, že grupa pohybov v priestore je nekomutatívna, to je fakt, o ktorom niet čo diskutovať. To, ako tento fakt deťom priblížiť, to naopak diskusiu vyžaduje. Zasadenie výučby matematiky do kontextu *historickej genézy objektívneho matematického poznania* chráni genetický konštruktivizmus od extrémov personálneho aj sociálneho konštruktivizmu.

Po kritike personálneho a sociálneho konštruktivizmu, pred ktorou je podľa nášho názoru genetický konštruktivizmus ochránený dôrazom na historickú genézu matematického poznania, pristupuje Rendl ku kritike *didaktického konštruktivizmu*. Tam už priamo mieri na viaceré Hejného formulácie, takže tu už naša obhajoba musí byť adresnejšia. Didaktickému konštruktivizmu Rendl vytýka, že: „čokoľvek, čo povie učiteľ, je zbytočné (pretože neúčinné) alebo dokonca škodlivé, pretože to vo svojich dôsledkoch vedie ku zhubnej nemoci formalizmu“ (Rendl, 2008, s. 168). Podľa genetického konštruktivizmu edukátor (čiastočne vtelený do učebnice) nemá byť nemý. Jeho úlohou je klásť otázky, formulovať problémy, riadiť diskusiu. Úlohou učiteľa nie je hovoriť deťom „múdra“, teda dávať im odpovede ešte prv, než zaznejú otázky.[14] To ale neznamená, že jeho úloha je pasívna.

Mať rozmyslený proces genézy pojmu grupa, a tento proces pretransformovať do série úloh tak, aby žiaci grupu sami objavili, je náročnejšie, než im oznámiť, že je to množina s asociatívnou binárnou operáciou, s neutrálnym prvkom, obsahujúca ku každému prvku inverzný prvok. Niekomu, kto matematiku neštudoval, táto definícia nič nehovorí, je *formálna*, a to aj napriek tomu, že grupa je jeden z najúžasnejších pojmov celej matematiky.[15] Úlohou učiteľa nie je *povedať*, čo je to grupa, ale *ukázať to*, priviesť deti k tomu, aby to sami uvideli (aby sme použili Wittgensteinovo rozlíšenie z *Traktátu*). A to od učiteľa vyžaduje *rozsiahlu prípravu*: štúdium histórie, vymýšľanie príkladov, poznávanie reakcie žiakov – a *na tejto príprave založenú aktivitu* – formuláciu úloh, analýzu žiackych riešení, schopnosť rozpoznať chybné riešenia a odhaliť zdroj chyby, umenie viesť žiakov otázkami tak, aby sami chybu rozpoznali a odhalili jej zdroj – to určite nie je ani „zbytočné“ ani „škodlivé“. Iba to nie je tak pohodlné, ako hlásať formálne múdra v ich logickom usporiadaní.

[14] Počas štúdia na vysokej škole sme zvykli výuku matematiky charakterizovať ako súbor presných odpovedí na otázky, ktoré nepoznáme (resp. sú pred nami utajované).

[15] Ak by čitateľ pojem grupy poznal, možno vziať definíciu C* algebry alebo torzného modulu, aby mohol vychutnať formálny poznatok. Formálna definícia je úplne korektná, ale napriek tomu človeku nič nepovie.

Vladimir Igorievič Arnoľd mal pre stredoškolákov sériu prednášok o Galoisovej teórii, v ktorej im pomocou série *352 úloh ukázal*, čo je to Riemannova plocha algebraického polynómu a jej Galoisova grupa.[16] Samozrejme, Arnoľd tie pojmy definoval – a aj učiteľ môže zaviesť určité pojmy, aby mohol presne sformulovať problém, ktorý majú žiaci riešiť; môže zhrnúť výsledky, ku ktorým sa dospelo, aby bolo možné na ne neskôr nadviazať. Ale musí vytvoriť sériu úloh, ktoré umožnia žiakom tieto pojmy a definície samostatne objaviť a osvojiť si ich súvislosti. Takže ani toto nie je Hejného vynález, je to niečo prirodzené, čo je v súlade s charakterom matematiky, a ako ukazuje Arnoľdov príklad, robia to viacerí matematici. (Ďalšou nádhernou učebnicou tohto druhu je Polya, 1962.)

Po kritike didaktického konštruktivizmu Rendl cituje Hejného, aby konštatoval, že:

> V týchto citátoch Hejného dosahuje pojmové kutilstvo, významové sklzy a krátke spojenia na jednej strane a prezentovanie konštruktivizmu ako ideológie reformátorského hnutia na strane druhej takú mieru, ktorá nie je pre český didaktický konštruktivizmus – a zrejme ani pre Hejného dielo ako celok – typická. Avšak aj táto militantná podoba konštruktivizmu je akceptovaná a zvyšuje naliehavosť otázky, o akú argumentáciu sa vlastne konštruktivizmus opiera. (Rendl, 2008, s. 170)

Tu musíme dať Rendlovi za pravdu, aj keď možno konštatovať, že citáty, z ktorých vychádza, sú z (troch kapitol) jedinej publikácie, učebnice *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (Hejný, Novotná, & Stehlíková, 2004), ktorá nie je akademickým ale učebným textom, zameraným skôr na získanie poslucháča pre konštruktivistický prístup než na presviedčanie kolegov o jeho správnosti. Preto namiesto presných, vecných argumentov obsahuje obrazné, emotívne apely. Podľa nás je takýto text legitímny, len ho netreba zamieňať s textom akademickým. Je to podobné, ako keby hudobný kritik aplikoval na operetu prísne nároky platné pre symfónie.[17]

Po vysporiadaní sa s Hejného prístupom prechádza Rendl k hlavnej časti svojho textu, ktorou je kritická analýza príspevkov zo zborníka (Davis, Maher, & Noddings, 1990), ktorý v USA v roku 1990 ohlásil nástup konštruktivizmu v didaktike matematiky. Tým naznačuje, že *prechádza ku zdroju* Hejného metódy. Inak spojenie štvorstranového úvodu, venovaného kritike Hejného, s vyše tridsiatimi stranami textu, venovanými americkým konštruktivistom, nedáva zmysel. Nebudeme Rendlovu argumentáciu v tejto časti článku sledovať. Jeho kritika argumentácie amerických konštruktivistov založenej na rozbore anekdotických historiek (Rendl, 2008, s. 171–179) či dezinterpretácii výskumných dát (Rendl, 2008, s. 183–200), rovnako ako jeho analýza teoretických východísk konštruktivizmu (Rendl, 2008, s. 179–183)

[16] Arnoľdove prednášky spísal Valerij Borisovič Aleksejev a vydal ako (Aleksejev, 1976).

[17] Aj keď uvedenú Rendlovu kritiku považujeme do veľkej miery za nedorozumenie (keď učebný text kritizuje ako vedeckú publikáciu), za plne oprávnený bod jeho kritiky považujeme upozornenie na skutočnosť, že neexistuje teoretické dielo, ktoré by sme mohli položiť na miesto kritizovaných *Dvaceti pěti kapitol* s tým, že tam sú príslušné pojmy a princípy vyložené bez významových sklzov, krátkych spojení a zjednodušovania. Preto Rendlovu kritiku chápeme ako výzvu do radov genetického konštruktivizmu, aby také dielo predložili.

sú presvedčivé a možno s nimi súhlasiť. Črty, ktoré na textoch amerických autorov kritizuje, však s genetickým konštruktivizmom nesúvisia. Na záver preto len poznamenáme, že *genetický konštruktivizmus* sa neodvodzuje od uvedeného zborníka z 1990-tych rokov. Jeho prvým rozsiahlejším programovým textom boli *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM* (Hejný & Hejný, 1977/2012), vydané 23 rokov pred nástupom americkej vlny.

### 2.2 Should Learning (Mathematics) at School Aim at Knowledge or at Competences? (Rendl & Štech, 2012)

Článok sa zaoberá kritickou analýzou vzťahu medzi reformným a tradičným prístupom k vyučovaniu matematiky a na základe širokého prehľadu aktuálnych výskumov argumentuje, že tradičný prístup, orientovaný na dekontextualizované poznatky, a reformný prístup, orientovaný na kompetencie pri riešení realistických úloh, sa skôr dopĺňajú než vylučujú a na základe empirických dát nemožno jednoznačne uprednostniť ani jeden z nich. Z pozícií genetického konštruktivizmu možno s takýmto záverom iba súhlasiť. *Konštruktivistický aspekt* genetického konštruktivizmu (založený na princípe epistemickej blízkosti) zohľadňuje reformný prístup k vyučovaniu matematiky, kým jeho *genetický aspekt* (založený na princípe genetickej paralely) je v súlade s tradičným prístupom, kladúcim dôraz na proces postupnej dekontextualizácie a následnej rekontextualizácie poznania, ku ktorým v matematike stále znova a znova dochádza. Preto s celkovým zameraním článku nemáme problém.

Čo nás predsa len vyprovokovalo k reakcii je skratové stotožnenie konštruktivizmu s učením zameraným na kompetencie hneď na prvej strane textu (Rendl & Štech, 2012, s. 23). Celá následná diskusia sa už zakladá iba na opozícii (školských) poznatkov a (pre život užitočných) kompetencií, a konštruktivizmus sa už nespomína, ale identifikácia kompetencií a konštruktivizmu v úvode článku stavia konštruktivizmus do jasnej súvislosti s kompetenciami. Z pohľadu genetického konštruktivizmu je takéto spojenie chybné. Vyučovanie zamerané na kompetencie ignoruje historickú ukotvenosť matematického poznania, teda skutočnosť, že kľúčové matematické pojmy sa zrodili v procese postupnej viacúrovňovej abstrakcie a ich vyvodzovanie zo „situácií reálneho života“ je preto pomýlené. Z pohľadu genetického konštruktivizmu je spájanie kompetencií[18] s matematikou omylom. Žiadne matematické kompetencie neexistujú, ide o chiméry, o artefakty vytvorené testovaním.[19] Mohlo by sa zdať, že identifikácia konštruktivizmu s vyučovaním zameraným na kompetencie

[18] Matematické kompetencie možno chápať v duchu *Bildungsstandards Mathematik*, ktoré označujú v Nemecku záväzné pokyny pre vyučovanie matematiky, ktoré boli zavedené v roku 2003 ako následok štúdie PISA a formulujú šesť všeobecných matematických kompetencií. Tieto kompetencie majú byť získané v procese učenia: Matematicky argumentovať (K1), Matematicky riešiť problémy (K2), Matematicky modelovať (reálnej situácie) (K3), Používať matematické reprezentácie (ako sú grafy, diagramy a pod.) (K4), Vedieť zaobchádzať sa symbolickými, formálnymi a technickými prvkami matematiky (K5), Matematicky komunikovať (rozumieť matematickému textu a vedieť vysvetliť matematické súvislosti) (K6). (Hofe, Blum, & Pekrun, 2007)

[19] K tomuto problému sa podrobnejšie dostaneme v tretej časti našej state – viď poznámku 24.

v reálnom živote je iba náhodná, nepodstatná črta článku Rendla a Štecha. Ale ako ukáže analýza nasledujúceho textu, príslušná identifikácia vôbec nie je náhodná a je súčasťou širšie pojatého výkladu súčasnej situácie vo vyučovaní matematike, k analýze ktorej teraz prejdeme.

### 2.3 Když je kurikulární reforma evidence-less (Štech, 2013)

Štech sa vo svojom podnetnom článku venuje analýze príčin zlyhania kurikulárnej reformy v Českej republike. Hlavný nedostatok *Rámcových vzdelávacích programov* vidí v podriadení učiva kompetenciám. Poukazuje na štúdie, ktoré spochybňujú vedecký status kompetencií. V úvode stavia proti sebe dva prístupy k učeniu. Podľa prvého „žiaka je potrebné konfrontovať s autentickými životnými situáciami, aby si poznatky osvojil vlastnou skúsenosťou", kým podľa druhého je potrebné „uviesť dieťa do kultúry, ktorá je výsledkom vývoja ľudstva" (Štech, 2013, s. 619). Vidíme, že prvý prístup zodpovedá princípu epistemickej blízkosti a druhý princípu historickej ukotvenosti. Preto nám táto opozícia pripadá v prípade matematiky nefunkčná. Ak chceme dieťa naučiť matematiku, musíme uplatňovať ako princíp epistemickej blízkosti, tak aj princíp historickej ukotvenosti.

O niekoľko strán ďalej Štech konštruuje oblúk, s ktorým však nemôžeme súhlasiť:

> Od 80. rokov najprv v USA, neskôr aj v Európe (u nás zhruba v polovici minulej dekády) sa pod tlakom neoliberálnych ekonómov a podnikateľských kruhov objavujú dokumenty, ktoré kritizujú školské vzdelávanie založené na odborovom kóde a presadzujú príklon ku kompetenciám ako cieľu vyučovania/učenia. (Štech, 2013, s 622)

Je možné, že medzi týmito tromi prúdmi (prúdom neoliberálnej ekonómie, prúdom kritiky školského vzdelávania založeného na odborovom kóde, a prúdom príklonu ku kompetenciám) existuje určitá súvislosť. Nie je však možné každú kritiku školského vzdelávania, založeného na odborovom kóde, automaticky spájať ani s neoliberalizmom, ani s príklonom ku kompetenciám. Kvôli tomu, aby nedochádzalo k takýmto skratovým spojeniam, je nutné *genetický konštruktivizmus* z tohto rámca vyňať a kriticky ho vymedziť voči dvom krajným prúdom Štechovej identifikácie (t.j. neoliberalizmu a kompetenciám).

Genetický konštruktivizmus sa *zrodil v 50-tych rokoch 20. storočia* (pozri Bachratý, 2012 pre datovanie prvých textov Víta Hejného), teda dávno predtým, než k nám dorazila vlna *neoliberalizmu*. Ak niektorí zástanci neoliberalizmu vidia v Hejného metóde spojenca a podporujú jej šírenie, je to spojenectvo náhodné a nesystémové. Nám sa ako problém javí skôr dlhá doba vyslovenej nevraživosti zo strany oficiálnej didaktiky a pedagógie socialistického Československa, ktoré po revolúcii vystriedalo obdobie ignorovania.[20] Tam treba hľadať afinitu genetického konštruktivizmu s reformnými trendmi a nie v neoliberálnom základe, ktorý je jeho autorovi dosť cudzí. Rovnako treba genetický konštruktivizmus jasne vymedziť voči pojatiu učenia,

[20] Na túto skutočnosť upozornil nedávno aj Radim Šíp. (Šíp, 2015, s. 677 a 694)

ktoré *zanedbáva uvádzanie dieťaťa do kultúry, ktorá je výsledkom vývoja ľudstva.* Princíp historickej ukotvenosti matematických poznatkov znamená, že *matematické poznanie je kultúrne konštituované* – čísla, tvary či algebraické štruktúry existujú v rámci kultúry rovnako ako básnické formy či hudobné štýly.[21] Tak, ako je nemožné učiť hudbu či literatúru bez toho, aby sme dieťa uviedli do kultúry, nedá sa bez toho učiť ani matematika. A rovnako je potrebné genetický konštruktivizmus vymedziť voči *kompetenciám*. Tomu sa budeme venovať v tretej časti textu, kde chceme urobiť viac než len oddeliť genetický konštruktivizmus od prístupu založeného na kompetenciách. Chceme ukázať, že nič také, ako matematická kompetencia, ani špecifickejšie kompetencie viažuce sa na prvky matematického učiva, neexistuje.

Štech uvádza, že „za orientáciou vzdelávania na kompetencie sa skrývajú hlavne ekonomické ciele – poslúžiť trhu práce“ (Štech, 2013, s 622). Aj keď nechceme spochybňovať uvedený motív, podľa nás možno kompetencie vnímať ako chybný import z lingvistiky. V prípade jazyka je *jazyková kompetencia* dobre definovaný pojem a kritika *tradičného spôsobu vyučovania* jazykov, kladúceho dôraz na gramatiku a slovnú zásobu, je plne oprávnená. Každý z nás starších zažil 8 i viacročné školovanie v ruskom jazyku, v rámci ktorého sa človek nenaučil zvládať základné situácie, ako je nakupovanie či bežná konverzácia s hosťom, lebo kým si uvedomil, s ktorým pádom sa viaže ktorá predložka, tak často stratil niť toho, čo chcel povedať. V prípade vyučovania cudzieho jazyka (za predpokladu, že sa nejedná o budúceho filológa či lingvistu), je plne oprávnené žiadať na škole, aby *žiaka konfrontovala s autentickými životnými situáciami, aby si poznatky osvojil vlastnou skúsenosťou* s odposluchom hovoreného slova a komunikáciou v reálnych situáciách. Preto si myslíme, že väčšina toho, čo Štech uvádza ako kritiku vyučovania založeného na kompetenciách (schopnosť konať ako vzdelávací cieľ, moment mobilizácie ako jadro kompetencie, dôraz na novosť a jedinečnosť situácií), je v prípade vyučovania cudzích jazykov funkčné, správne a adekvátne. Učiť sa jazyk znamená učiť sa konať, pri používaní jazyka je kľúčový moment mobilizácie (gramatických, kontextových, lexikálnych, a štylistických znalostí) a jazyková kompetencia sa prejavuje práve zvládaním nových a jedinečných (komunikačných) situácií. Pokúsime sa však ukázať, že v prípade matematiky, a v tom sa v plnej miere zhodujeme so Štechom, je vyučovanie založené na kompetenciách nefunkčné, nesprávne a neadekvátne.

[21] Nielenže matematika je súčasťou kultúry, ale v rámci matematiky existujú určité druhy *matematickej kultúry*. Uvedieme štyri: *kultúru čistej matematiky* (Godfrey Harold Hardy), *kultúru aplikovanej matematiky* (Vladimír Igorievič Arnoľd), *kultúru matematiky ako riešenia problémov* (Paul Erdős) a *kultúru matematiky ako budovania teórií* (Alexandre Grothendieck). Mená v zátvorkách nematematikovi veľa nepovedia, ale sú to kultové postavy svetovej matematiky, o ktorých kolujú legendy. Paul Erdős zvykol hovoriť, že Boh má v nebi knihu, v ktorej je ku každej vete uvedený dokonalý dôkaz. Matematik nemusí veriť v Boha, ale musí veriť v knihu. Jeho žiaci ju vydali ako *Proofs from THE BOOK* (Aigner & Ziegler, 2009). Na opačnom póle stojí Alexandre Grothendieck, podľa ktorého ak nedokážeme vyriešiť určitý problém, tak ho máme zovšeobecniť. Grothendieck obvinil svojho žiaka Pierra Delignea zo zrady *Programu* za to, že publikoval výsledky, ktoré neboli dostatočne abstraktné (a dostal za ne Fieldsovu medailu). Arnoľd vraj o jednej svojej knihe povedal, že „každá funkcia v tejto knihe má toľko derivácií, aby o nej platili vety, ktoré sú o nej vyslovené“, čo je veľkolepé gesto, znamenajúce odmietnutie zaoberať sa detailami. A Arnoľdove knihy skutočne idú priamo k podstate veci.

Po tom, ako sme upozornili na momenty, v ktorých sa genetický konštruktivizmus rozchádza so Štechovou analýzou (stavanie skúsenostného učenia do opozície s inkulturáciou; spájanie konštruktivizmu s neoliberalizmom a kompetenciami; výklad kompetencií ako zlej odpovede na skutočný problém), nebudeme ďalej analyzovať jeho text. Mnohé Štechove postrehy sú presné a možno súhlasiť aj s jeho analýzou príčin zlyhania kurikulárnej reformy. Radšej prejdeme k otázke kompetencií v matematike.

## 3 K otázke matematických kompetencií[22]

Keď sa na použitie pojmu kompetencií vo vyučovaní v matematike pozrieme z hľadiska princípov genetického konštruktivizmu zistíme, že pojem kompetencií je v súlade iba s prvým a štvrtým z týchto princípov. Princíp epistemickej blízkosti a princíp jednoty sú spoločné matematike a jazyku. Je možné, že to bola práve spoločná epistemická blízkosť, ktorá primäla zástancov konštruktivizmu prebrať pojem kompetencie z oblasti výuky jazykov a pokúsiť sa založiť na ňom vyučovanie matematiky. Pri vyučovaní jazykov je orientácia na kompetencie zmysluplný a efektívny prístup. Kritiku používania pojmu kompetencie vo vyučovaní matematiky založíme na tom, že poukážeme na zásadný rozdiel, ktorý existuje medzi materinským jazykom a matematikou z hľadiska zvyšných štyroch princípov genetického konštruktivizmu.

### 3.1 Kompetencie a princíp ontickej záväznosti matematiky

Hlavný rozdiel medzi matematikou a jazykom spočíva v ontickej záväznosti matematiky. To, že grupa rotácií v priestore je nekomutatívna, to je fakt, ktorý každý matematik musí rešpektovať. Pri budovaní určitej matematickej teórie jej tvorca musí svoj pohľad zamerať do sveta matematiky. Petr Vopěnka to vyjadril v dnes už klasickej pasáži:

> Geometer má pred sebou list papiera pokreslený čiarami rozmanitých tvarov, rovnými aj krivými, navzájom poprepletanými a pretínajúcimi sa v rôznych bodoch. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohľad však prenikol cez obrázok, von z reálneho sveta do sveta geometrického. Tak napríklad za rovnou čiarou uvidel geometrickú úsečku, uvidel ju v jej úplnej čistote a spolu s ňou uvidel dokonalú priamosť. Od okamihu tohto prehliadnutia je pre neho navždy úsečka úsečkou geometrickou, a nie čiarou narysovanou podľa pravítka. (Vopěnka, 2000, s. 23)

Matematik nemôže rozhodnúť, čo vo svete uvidí. Často to, čo uvidí, je preňho nezrozumiteľné a trvá určitú dobu, než sa zorientuje.

Situácia v prípade jazyka je zásadne odlišná. Človek nemusí hľadieť nikam mimo seba, aby zahliadol určitý jazykový jav. To, že ako vyzerá štvrtý pád od slova býk, to vie úplne automaticky každý kompetentný hovorca slovenčiny. To, že koľko

[22] Redakce časopisu upozorňuje čtenáře na komentáře recenzentů k této části textu, jež jsou citovány v úvodníku tohoto čísla.

generátorov má grupa rotácií v trojrozmernom priestore automaticky nevie nikto. Samozrejme, nie je to ťažké zistiť, v dôsledku princípu epistemickej blízkosti matematiky vieme, že sa stačí trocha zamyslieť a uvedomiť si napríklad, že rotácie zobrazujú na seba jednotkovú sféru a každý bod na jednotkovej sfére je zadaný dvojicou súradníc. Ale toto sme zistili inak, než v prípade akuzatívu slova býk, kde každý vie, že *vidí býka*, nie *býkovi* či *býkom*. Preto vedieť matematiku je niečo zásadne iné, než byť kompetentný. Nie je to schopnosť aplikovať pravidlo, ale schopnosť nahliadnuť, porozumieť a na základe porozumenia odvodiť hľadaný fakt. To, že štvrtý pád slova býk je *býka*, na tom nie je nič faktické, to sa nedá nijako odvodiť alebo nahliadnuť, to je konvencia, ktorú treba poznať, a jazyková kompetencia spočíva práve v ovládaní pravidiel jazyka. *Jazyk sa neriadi princípom ontickej, ale sociálnej záväznosti*. Keďže jazyk je ľudský výtvor, je *plne* v našej moci, dokážeme plne ovládnuť jeho pravidlá a stať sa kompetentnými hovorcami. Matematika nie je takto v našej moci, matematiku nikto plne neovláda, matematika nás presahuje, v matematike nikto nie je kompetentný. Používať v spojení s matematikou pojem kompetencie je zavádzajúce, mätúce, nezmyselné, nebezpečné a chybné.

*Zavádzajúce* preto, lebo vytvára ilúziu akýchsi kompetentných matematikov, ktorí neexistujú. Algebraické rovnice piateho stupňa sú neriešiteľné, problém troch telies je chaotický, diofantické rovnice sú nerozhodnuteľné. Aká kompetencia, v čom?[23] *Mätúce* preto, že v učiteľovi vyvoláva očakávania, ktoré žiak nikdy nemôže splniť. Môžu samozrejme začať hrať hru, pri ktorej učiteľ kladie otázky z určitej obmedzenej palety a žiak sa naučí na ne odpovedať v súlade s predstavami učiteľa. Ale takáto hra nemá nič spoločné s matematikou, a to aj napriek tomu, že v otázkach a odpovediach sa môžu vyskytovať slová ako prvočíslo, trojuholník alebo rovnica. *Nezmyselné* preto, lebo orientuje energiu, úsilie a pozornosť žiaka na ovládnutie určitých čiastkových zručností, ktoré sú mu aj tak nanič, miesto toho, aby objavoval svet matematiky. *Nebezpečné* preto, lebo rôznym samozvaným spoločnostiam, ktoré sa podujali hodnotiť školu, dávajú iluzórne pseudokritériá v mene ktorých školu nekompetentne hodnotia, dávajú jej skreslenú spätnú väzbu, a tým ničia samoregulujúce mechanizmy riadenia kvality vyučovania. A nakoniec *chybné* preto, lebo kompetencie v matematike neexistujú.[24]

---

[23] Dalo by sa namietať, že tu matematickú kompetenciu absolutizujeme a že v určitom praktickom kontexte matematická kompetencia existuje. Napríklad učiteľ musí byť kompetentný v oblasti učiva, ktoré vyučuje. Ale domnievame sa, že táto kompetencia učiteľa nie je odvodená od sveta matematiky, ale vyplýva z kontextu učenia, a teda to nie je *matematická kompetencia*, ale matematická zložka *didaktickej kompetencie*. Tam samozrejme neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa nie je problémom, lebo rovnice piateho stupňa nie sú súčasťou učiva. Čo chceme povedať je, že kompetentný môže byť človek v určitom ohraničenom a prehľadnom univerze, ktoré síce môže byť značne bohaté (ako je napríklad univerzum jazyka), ale musí byť bezpečné a zvládnuteľné. To univerzum matematiky určite nie je a všetky snahy urobiť ho ohraničeným a prehľadným ho zabijú.

[24] Táto téza sa môže zdať tvrdá, predovšetkým keď sme pojem kompetencie nedefinovali. Vzhľadom k nášmu presvedčeniu, že kompetencie v matematike neexistujú, by sme sa neradi púšťali do pokusov o ich definíciu. Sme plne spokojní so spôsobom, ako je tento pojem zavedený v Štechových textoch, takže čitateľa túžiaceho po vyššej miere presnosti odkazujeme tam. Mohlo by sa tiež zdať, že kompetencie sú sociálnym konštruktom, a keď sa určitá komunita rozhodne

## 3.2 Kompetencie a princíp inštrumentálnej ukotvenosti matematických poznatkov

Matematika sa od jazyka ďalej odlišuje aj tým, že skúma zložité konfigurácie, na poznávanie ktorých vytvára nástroje symbolickej a ikonickej reprezentácie. Jazyk naproti tomu žiadne takéto inštrumenty nepoužíva. Keď v algebre chceme vyriešiť určitú zložitejšiu sústavu lineárnych rovníc, zapíšeme ju pomocou matice, a potom túto maticu upravujeme pomocou Gaussovej eliminačnej metódy. Bolo by absurdné, keby hovorca slovenčiny v určitej komplikovanej situácii poprosil svojich spolubesedníkov, aby na chvíľu zastavili rozhovor, lebo on si to, čo každý z nich práve povedal, zapíše pomocou matice, desať minút bude niečo upravovať, nájde riešenie a môžu pokračovať v rozhovore. Jazyk je priezračný, keď ho používame, nepotrebujeme žiadne inštrumenty. *Jazyk nie je inštrumentálne, ale habituálne ukotvený*, je to zvyk, určitý habit, určitá forma života.[25] Každý, kto si tento habit osvojil, kto vrástol do príslušnej formy života, je kompetentným hovorcom jazyka.

V matematike sme naproti tomu závislí od reprezentačných nástrojov. Máme polynómy, matice, permutácie, algebraické rovnice, diferenciálne rovnice, integrálne rovnice a mnoho ďalších viac alebo menej univerzálnych reprezentačných nástrojov. Pritom v každom z týchto nástrojov sa otvára bezodná priepasť komplikácií. V každom z nich vieme riešiť niekoľko základných úloh, ale súčasne sa vynára celý rad ďalších, úplne beznádejných problémov. Čo znamená byť kompetentný tu nedáva zmysel. Je kompetentný ten, kto zvládol 30 základných problémov v 18 hlavných nástrojoch? Pritom sa tu vracia nebezpečenstvo, na ktoré sme už upozornili. Tým je vystavenie školstva zvôli samozvaných testovateľov a hodnotiteľov. Oni vyberú, ktoré nástroje, ktoré úlohy a v ktorých kontextoch tvoria príslušnú kompetenciu.

---

tento pojem používať, v sociálnom svete tejto komunity kompetencie začnú existovať. Samozrejme, v tomto zmysle kompetencie, rovnako ako duchovia, anjeli a bunky na matematiku existujú. Ale rovnako, ako úlohou didaktiky matematiky nie je skúmať duchov, anjelov či bunky na matematiku, nemala by sa zaoberať ani kompetenciami. Otázkou nie je, či sa spoločenstvo didaktikov rozhodlo tento pojem používať, ale či v kognitívnom, citovom a sociálnom živote detí tomuto pojmu niečo reálne korešponduje. Keď raz prídu vedci zaoberajúci sa *Social Studies of Science* (skratka SSS) a budú svojimi vedeckými metódami skúmať predstavy, mýty a rituály komunity didaktikov matematiky, možno ukážu, že kompetencie v matematike tvoria súčasť sociálnej reality tejto komunity. Ale to nič nemení na skutočnosti, že v kognitívnej, emočnej a sociálnej realite žiakov im nič nekorešponduje, teda ako predmet didaktiky matematiky neexistujú.

[25] Protikladom habituálneho ukotvenia jazyka a inštrumentálneho ukotvenia matematiky nechceme navodiť predstavu, že by jazyk podliehal ľubovôli. Jazyk musí zrkadliť vlastnosti sveta, inak by nám nepomáhal prežiť. Inštrument však ide nad rámec zrkadlenia. Ako sme sa snažili vysvetliť v (Kvasz, 2015), inštrument je fyzický predmet, ktorý bol síce skonštruovaný človekom, ale pri jeho správnom použití dáva výsledky, ktoré sú mimo možnosti ľudského vplyvu. Keď správne použijem teplomer, práve preto, že teplomer je fyzický predmet, výsledok ktorý ukáže je výsledkom objektívnych fyzikálnych procesov, ktoré sú mimo mojej kontroly. To isté platí o kružidle a pravítku alebo o dekadickej pozičnej sústave. Znaky na papieri sú fyzické predmety a ak ich správne používam, tak výsledok, ktorý pri výpočte dostanem, má mieru faktickej determinovanosti, akú žiaden jazykový akt mať nemôže, alebo aspoň za normálnych okolností nemá.

V porovnaní s jazykom tu vidno zásadný rozdiel. To, či je niekto kompetentný hovorca, to nemusí určiť nejaká súkromná spoločnosť živiaca sa testovaním. To každý vidí, respektíve počuje, keď človek prehovorí. Kompetencia v prípade slovenčiny je jednoznačná vec, dokázať komunikovať a zapájať sa do života jazykového spoločenstva.[26] Naproti tomu v matematike nikto nevie, kto je kompetentný a kto nie, a testovacie spoločnosti o tom rozhodujú na základe svojvoľných kritérií.[27]

### 3.3 Kompetencie a princíp historickej ukotvenosti matematických poznatkov

Matematika je ukotvená historicky, jednotlivé matematické pojmy a poznatky sa zrodili v určitej dobe a najlepší spôsob, ako ich učiť, je navodiť problémy a situáciu, ktoré viedli k ich zrodu. S jazykom je to úplne inak. Samozrejme, aj jazyk má svoje dejiny, ale jazyk nie je v týchto dejinách ukotvený. Jazyk je ukotvený v jazykovom správaní sa jazykového spoločenstva a nie v histórii. Keď chceme, aby sa dieťa naučilo používať všetkých päť rodov (mužský, ženský, stredný, činný a trpný), stačí ho vystaviť jazykovej komunikácii kompetentných hovorcov a dieťa to *odpozoruje*. Naproti tomu, keď chceme, aby sa dieťa naučilo, čo je to grupa, nepomôže mu, keď bude počúvať, ako sa ľudia pracujúci v teórii grúp medzi sebou rozprávajú. Jazyk sa dá napočúvať, ale matematika nie. Každé päťročné dieťa je viac alebo menej kompetentným hovorcom svojho materinského jazyka. Preto v učení jazykov má pojem kompetencie dobrý zmysel – označuje niečo dosiahnuteľné, niečo, čo je v dosahu bežného smrteľníka. V matematike nič také neexistuje. Existuje iba otvorený historický proces.

Je to, ako keby sa v jazyku neustále rodili nové slovné druhy, akoby neustále vznikali nové pády, nové časy, nové rody. Tí najlepší z najlepších, nositelia jazykového ekvivalentu Fieldsovej medaily, by používali v niektorých svojich prehovoroch 52-hý pád, a nedávno by niekto zaviedol dokonca 68-my čas, ale zatiaľ to ešte nie je oficiálne, lebo recenzenti overujú, či je to v poriadku. A dokonca, keď si spomenieme na Descartovu vizualizáciu algebraických formúl, kedy polynómom, ktoré dovtedy nemali žiadnu geometrickú interpretáciu, pripísal tvar, tak to v jazyku môžeme prirovnať radikálnemu novátorovi, ktorý zrazu začne od podstatných mien tvoriť minulý čas. V jazyku by sme to označili ako kategoriálnu chybu, a kategoriálnou chybou to

[26] Na prvý pohľad sa môže zdať, že niečo podobné musí platiť aj pre matematikov. Nie je to však pravda. Keď sebalepší matematik zájde na konferenciu venovanú oblasti, v ktorej nepracuje, prakticky ničomu nerozumie. Spoločenstvo matematikov nie je konštituované jazykom, nie je to jazykové spoločenstvo. Nech sa človek sebalepšie naučí ľubovoľný počet subdisciplín, budú existovať stovky a tisíce ďalších, s odborníkmi v ktorých si absolútne nebude rozumieť. Každá z nich je preňho otvorená, môže do nej preniknúť a princíp jednoty matematiky znamená, že s veľkou pravdepodobnosťou ho toto preniknutie profesne obohatí. Ale neexistuje čosi ako matematická kompetencia, po zvládnutí ktorej by človek mohol načúvať kolegom z vlastnej fakulty s podobnou mierou porozumenia, s akou im rozumie v každodennej komunikácii vo fronte na obed.

[27] Na svojvôľu testovania matematiky v rámci projektu PISA upozornili štúdie Kaščáka a Pupaly (2011, predovšetkým s. 60–67) a Štecha (2011).

bezpochyby bolo aj v prípade Descarta. Algebra je symbolický jazyk, ktorý nemá nič spoločné s geometriou. Pripisovať vzorcom tvar je rovnaká chyba, ako pripisovať podstatným menám minulý čas. Ale tá Descartova kategoriálna chyba je úplne geniálna a po ňom ju všetci nadšene opakujeme. Uvidieť kubickú parabolu tam, kde Cardano mal len „cubus a veci rovné číslu“, je absolútna frajerina. V prípade jazyka je niečo také, ako minulý čas podstatných mien, teda miešanie prvkov patriacich do rôznych kategórií, absurditou. Ale presne to neustále robí matematika, rozrušuje pevné hranice a nachádza súvislosti tam , kde prv nikto žiaden súvis nevidel – čo je asi hlavný príznak princípu jednoty matematiky. Najprv matematici vymysleli vedľa troch rozmerov priestoru ešte štvrtý, piaty, ... rozmer, až niekto (Hilbert) prišiel s nekonečnorozmerným priestorom, aby ho ďalší (Hausdorff) tromfol s tým, že zavedie priestor neceločíselnej dimenzie, povedzme 1,238. Spočiatku sa takéto priestory skúmali ako kuriozity, ale dnes už existujú derivácie neceločíselného rádu a diferenciálne rovnice s takýmito deriváciami (resp. diferenciálnymi operátormi), ktoré opisujú reálne procesy.

Ako tu má byť niekto kompetentný? Matematika sa nedá zvládnuť. Samozrejme, nie je nič ľahšie, než zobrať seba za etalón. Každý, kto zvládol to, čo som z matematiky zvládol ja, je kompetentný, každý, kto niečo z toho nezvládol, je nekompetentný. Zdá sa, že toto je zhruba to, čo sa pri testovaní kompetencií v matematike deje.

### 3.4 Kompetencie a princíp genetickej paralely

Asi najabsurdnejšie pôsobí pojem kompetencií z hľadiska princípu genetickej paralely. Tento princíp znamená zhruba toľko, že na to, aby bolo dieťa schopné pochopiť a prijať poznatky určitého štádia procesu genézy matematického poznania, musí prejsť predchádzajúcimi štádiami. V časti 1.6, kde sme zavádzali princíp genetickej paralely, sme uviedli niekoľko jeho ilustrácií. Keď sa z hľadiska tohto princípu pozrieme na výuku jazyka, znamená to, že dieťa musíme najprv naučiť základy indoeurópskeho prajazyka, potom si musí osvojiť staroslovienčinu, zvládnuť stredovekú slovenčinu, bernolákovčinu, štúrovčinu, no a najšikovnejšie deti potom naučíme aspoň fragment súčasnej modernej slovenčiny. To je absurdné. Výuka jazyka nesleduje princíp genetickej paralely – jazyk je súbor určitých pravidiel, ktoré dieťa odpozoruje počúvaním rozhovoru dnešných hovorcov. Preto má v prípade jazyka dobrý zmysel pojem kompetencie.

Naproti tomu v matematike, ktorej vyučovanie by malo, aspoň podľa genetického konštruktivizmu, sledovať princíp genetickej paralely, pojem kompetencie nemá zmysel. Matematika nie je súborom praktických zručností, v súvislosti s ktorým by malo zmysel používať pojem kompetencie. Dostávame sa tak k téze: *kompetencie v matematike neexistujú*. To, že sa túto tézu podarilo zdôvodniť na základe princípov genetického konštruktivizmu asi najlepšie ukazuje, že genetický konštruktivizmus nemožno spájať s vyučovaním orientovaným na kompetencie. Genetický konštruktivizmus v tejto otázke stojí pevne na strane vyučovania založeného na odovzdávaní kultúrneho dedičstva ľudstva. Euklidove *Základy*, Descartova *Geometria*, Newtonove

*Princípie* či Eulerov *Diferenciálny počet* patria do klenotnice európskej civilizácie rovnako ako Bachova, Mozartova, Bethovenova či Bartókova hudba. Úlohou školy je toto dedičstvo odovzdávať z generácie na generáciu. S tým genetický konštruktivizmus v plnej miere súhlasí. Ide mu len o to, aby sa odovzdal *živý, autentický kontakt* s týmto dedičstvom a nielen jeho *formálne, bezduché memorovanie*.

## 4 K otázke zmeny paradigmy v pedagogike

Okrem kritických reakcií sa Hejného metóda stretla aj s priaznivým ohlasom. Bolo to napríklad v stati *Pedagogika a paradigmatický obrat v metodologii teorii* od Radima Šípa (Šíp, 2015). Článok je napísaný na pozadí pozoruhodne širokého prehľadu filozofickej literatúry, siahajúcej od pragmatizmu až po súčasné diskusie vo fenomenológii. Autor rozlišuje *ranne modernú paradigmu*, ktorá sa podľa neho spája so subjekt-objektovým myslením a *neskoro modernú paradigmu*, ktorá „bola uvedená na scénu s objavom významu času v hegelovskej filozofii a bola posilnená objavom evolučného metanaratívu" (Šíp, 2015, s. 673). Neskoro moderná paradigma opúšťa vizuálnu metaforu uchopovania pravdivého poznatku a nahradzuje ju pohľadom na poznanie ako na riešenie praktického problému v určitej situácii, ktoré sa spája s previazanosťou jednajúceho so svojím okolím. Odmieta aj chápanie poznania ako hľadania korešpondencie medzi našimi reprezentáciami a pravými štruktúrami sveta. Namiesto korešpondencie kladie prepojenie teórie a praxe. Vedu zakotvenú v rane modernej paradigme Šíp kritizuje za idealizácie, ktoré sú pre pedagogické vedy nevhodné. V závere (s. 694–697) uvádza Hejného metódu, pričom rozpaky odbornej verejnosti s ňou spojené pripisuje na margo konfliktu uvedených dvoch paradigiem.

Šípove analýzy sú podnetné a s mnohými jeho závermi možno súhlasiť. Za obzvlášť cenné považujeme upozornenie na skutočnosť, že Hejného metóda prináša aj v rovine vedeckej metódy obrat, ktorý je možné charakterizovať ako zmenu paradigmy. Za objavné považujeme zvýraznenie blízkosti filozofického pozadia Hejného metódy s Deweyovským pragmatizmom, kladúcim dôraz na cieľaslednosť duševných procesov, na hodnoty a hodnotenie, na pojem homeostázy a na prepojenie organizmu s prostredím. Všetky tieto témy sa v textoch V. Hejného neustále vracajú a ich analýza bude asi vyžadovať rekonštrukciu z pozícií blízkych tým, ktoré predkladá Šíp. Keď uvedieme niekoľko kritických poznámok na margo Šípovho textu, robíme tak v presvedčení, že *spresnenie Šípovej pozície môže pomôcť k vyjasneniu metodologického pozadia Hejného metódy*. Domnievame sa totiž, že v hre nie sú dve paradigmy, ako píše Šíp, ale celý rad ďalších prvkov. Určité rozpaky ohľadne použitej terminológie uvádza aj sám autor, takže si je problémov, na ktoré sa pokúsime zaviesť pozornosť, vedomý. V súvislosti s vedou navrhujeme rozlíšiť tri roviny (pozri Kvasz, 2007).

Ako prvú rovinu treba odlíšiť *paradigmu*, pričom *ranne modernou paradigmou* budeme ďalej rozumieť *paradigmu newtonovskej vedy*. To je paradigma, ktorá úspešne funguje a umožňuje plniť ciele, ktoré ľudia pred vedu kladú – vďaka nej sme doleteli na Mesiac, objavili stavbu vesmíru a vytvorili tie úžasné prístroje, ako napríklad tomograf, ktoré umožňujú nahliadnuť do tela živého organizmu. Táto paradigma je založená na predpoklade *korešpondencie vedeckej reprezentácie s reprezentovanou skutočnosťou*, a je úplne v poriadku, pretože funguje, úspešne plní výhľadové ciele a nachádza riešenie problémov. Vedľa nej sa v polovici 19. storočia začala rodiť nová *paradigma darwinovskej vedy*. V biológii už nie je možné použiť hlavné prvky fyzikálnej idealizácie – oddelenie systému od jeho okolia (t. j. vytvorenie *uzavretého fyzikálneho systému*) ani odrezanie systému od jeho histórie (t. j. zavedenie *stavu fyzikálneho systému*). Paradigma darwinovskej vedy tak opúšťa mnohé prvky newtonovskej vedy. Ale ani newtonovská, ani darwinovská paradigma nemá nič spoločné s *vizuálnou metaforou poznávania* či so *subjekt-objektovým výkladom poznania*.

Aby sme našli pôvod dvoch posledne menovaných prvkov, musíme ako druhú rovinu odlíšiť *filozofický obraz vedy*.[28] Newtonovská paradigma sa zrodila rozvrátením staršej, karteziánskej fyziky, ktorá bola založená na vizuálnej metafore poznávania (Descartove *clara et disstincta perceptiones* ako zdroj istoty poznania vo vede) a problematiku vedeckej metódy formulovala ako vzťah subjektívneho poznania a objektívnej reality. Newton oba tieto prvky karteziánstva odmietol a prekonal (pozri Kvasz, 2013b). Na miesto vizuálneho vnímania ako zdroja poznania položil inštrumentálnu prax (teda meranie a experimentovanie). Pritom merací prístroj je súčasťou „objektívneho“ sveta, preto Newton dôrazom na inštrumenty a experimentovanie prekonal oddelenosť subjektu a objektu, vytvoril „inštrumentálne *situované poznanie*“, pričom, samozrejme, meranie i experiment sa robia s istým výhľadovým cieľom. Preto si dovolím vysloviť tézu, že mnohé z toho, čo pragmatizmus a fenomenológia dnes pracne objavujú, je už tristo rokov súčasťou newtonovskej paradigmy.

Z neznámych dôvodov osvietenská filozofia, po nej Kant a celá nasledujúca vlna nemeckého idealizmu newtonovskú vedu zaryto ignorovala a vytrvalo čítala Descarta ako hovorcu modernej vedy. Vo filozofickom obraze vedy, ktorý kvôli stručnosti označíme ako *kantovský obraz vedy*, ale, samozrejme, zastával ho celý rad filozofov pred Kantom i po ňom, tak zotrvala vizuálna metafora aj subjekt-objektové pojatie poznávania. Prvkami tohto obrazu Šíp charakterizuje ranne modernú paradigmu. To, čo Šíp opisuje ako zásadné výkony pragmatizmu a fenomenológie, tak vo fyzike už tristo rokov funguje. Dovolíme si tvrdiť, že fyzika je tak úspešná práve preto, že neberie vážne ani vizuálnu metaforu, ani reči o subjekte a objekte a rozvíja (inštrumentálne) *situované* poznanie zasadené do *výhľadových cieľov* (experimentálneho testovania a kvantitatívneho upresňovania merania). Mnohé z toho, čím Šíp charakterizuje neskoro modernú paradigmu je súčasťou newtonovskej vedy, a tak filozofia, v rámci toho, čo navrhujeme nazvať *pragmaticko-fenomenologický obraz*

[28] V práci (Kvasz, 2007) sme si túto dimenziu pôsobenia vedy na kultúru neuvedomovali, a preto je pre nás Šípov text zaujímavou inšpiráciou. Podrobnejší výklad Kuhnovho pojmu paradigmy možno nájsť v (Kvasz, 2012).

*vedy*, opúšťa optiku karteziánstva a stáva sa (konečne) kompatibilnou s newtonovskou vedou.

Zdá sa, že tento zmätok vo filozofickom výklade vedeckej metódy má vplyv na sebauvedomenie sociálnych a humanitných vied, ktoré prijali obraz vedy ako bol sformovaný vo filozofickej tradícii a buď ho imitovali, alebo naopak proti nemu vystupovali. Šípom navrhnuté odmietnutie subjekt-objektového výkladu vedy a vizuálnej metafory poznávania v rámci sociálnych vied je úplne v poriadku, len by nemalo byť namierené proti paradigme newtonovskej vedy, ktorá tieto inovácie navrhované Šípom už dávno sama zaviedla, ale proti filozofickému obrazu vedy v osvietenstve, kantovstve, nemeckom idealizme a novokantovstve, ktorý sme nazvali *kantovským obrazom vedy*.

Ako tretiu rovinu navrhujeme odlíšiť to, čo sme v stati (Kvasz, 2007) označili termínom *metaforická oblasť paradigmy*. Je to prenášanie pojmov a metód určitej paradigmy do oblasti javov, na ktoré tieto neboli pôvodne zamýšľané. Typickým príkladom je používanie kvantitatívnych metód, ktoré sú v prírodných vedách funkčné a efektívne, v oblasti sociálnych a humanitných vied. V protiklade ku kvantitatívnym metódam sa konštituovali metódy kvalitatívne. Súvis kvantitatívnych metód štatistickej analýzy s paradigmou newtonovskej vedy je však problematický, pretože štatistické metódy sa začali intenzívnejšie rozvíjať až s nástupom novej, darwinovskej paradigmy, takže Šípovo stotožnenie kvantitatívnych metód s ranne modernou paradigmou a kvalitatívnych metód s neskoro modernou paradigmou nesedí. Ranne moderná veda nepoužívala štatistické metódy.

Samozrejme, tieto tri roviny analýzy vedy sú navzájom prepojené. Nie sú však prepojené tak jednoduchým spôsobom, ako to opisuje Šíp. Ten pod *ranne modernú paradigmu* zahŕňa paradigmu newtonovskej vedy, kantovský obraz vedy a používanie kvantitatívnych metód, kým pod *neskoro modernú paradigmu* zahŕňa paradigmu darwinovskej vedy, pragmaticko-fenomenologický obraz vedy a kvalitatívne metódy. Ako sme sa snažili ukázať, medzi tromi rovinami Šípových analýz však existujú posuny. Kantovský obraz nesúvisí s newtonovskou paradigmou (napriek tomu, že sa k nej hlási), ale s prednewtonovskou vedou karteziánskeho razenia. Používanie kvantitatívnych metód rovnako nesúvisí s newtonovskou paradigmou, ale s paradigmou darwinovskej vedy. Preto to, čo Šíp označuje ako ranne moderná paradigma sa rozpadá.

Na druhej strane pragmaticko-fenomenologický obraz vedy treba, podľa nášho názoru, stotožniť s paradigmou newtonovskej vedy (a to aj napriek všetkým výhradám a námietkam). Takže pre paradigmu darwinovskej vedy nám chýba jej filozofický obraz. Sme presvedčení, že až tento obraz dokáže zachytiť to skutočne nové a radikálne, čo Hejného metóda po metodologickej stránke prináša. Je možné, že Šípom navrhovanú alianciu bude treba rozbiť a pragmatizmus ponechať ako analýzu newtonovskej paradigmy, kým fenomenológiu profilovať smerom k darwinovskej paradigme. Ale to sú už otázky presahujúce rámec tejto state.

## Poďakovanie

Chcel by som sa poďakovať Františkovi Kuřinovi a Jánovi Slavíkovi za podnetné diskusie a kritický komentár k rukopisu state. Stať bola napísaná pri príležitosti 80-tych narodenín Milana Hejného ako prejav vďaky, úcty a hlbokého priateľstva. Stať je súčasťou projektu Progres Q17 Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu.

## Literatúra

Aigner, M., & Ziegler, G. (2009). *Proofs from THE BOOK*. New York: Springer.

Aleksejev, V. B. (1976). *Teorema Abelja v zadačach i rešenijach*. Moskva: Nauka. (Anglický preklad: *Abel's Theorem in Problems and Solutions*. Dordrecht: Kluwer, 2004.)

Arnoľd, V. I. (1998). On teaching mathematics. *Russian Mathematical Surveys, 53*(1), 229–236.

Bachratý, H. (Ed.). (2012). *Archív Víta Hejného I*. Žilina: EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Noddings, N. (1990). Constructivist views on the teaching and learning mathematics. *Journal for research in mathematics education (monograph number 4*).

Galilei, G. (1623/1957). *The Assayer*. In S. Drake (Ed.), *Discoveries and opinions of Galileo* (s. 229–280). New York: Doubleday Company.

Heidegger, M. (1987). *Die Frage nach dem Ding*. Tübingen: Niemeyer Verlag. (Český preklad Jiří Polívka: Novověká matematická přírodní věda. *SCIPHI 6*, 1994, s. 76–112).

Hejný, V., & Hejný, M. (1977/2012). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM*. Krajský pedagogický ústav, Banská Bystrica. Citované podľa vydania v rámci zobraných spisov V. Hejného. In H. Bachratý (Ed.), *Archív Víta Hejného I* (s. 33–74). Žilina: EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity.

Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.). (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

vom Hofe, R., Blum, W., & Pekrun, R. (Hrsg.). (2007). *Mathematik heute, Band 1: Kompetenzorientierte Aufgaben und Kommentare (PALMA)*. Braunschweig: Schroedel.

Kaščák, O., & Pupala, B. (2011). PISA v kritickej perspektíve. *Orbis Scholae, 5*(1), 53–70.

Kuřina, F., & Hejný, M. (2015). *Dítě, škola, matematika*. Praha: Portál.

Kvasz, L. (2007). O vzťahu prírodných a spoločenských vied. In V. Kvasnička (Ed.), *Myseľ, inteligencia a život* (s. 95–109). Bratislava: STU.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Kvasz, L. (2012). Kuhnova ‚Štruktúra vedeckých revolúcií' medzi históriou a epistemológiou. *Teorie vědy, 34*(2), 167–187.

Kvasz, L. (2013a). Historické aspekty vyučování algebry. In M. Rendl, N. Vondrová et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 301–324). Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Kvasz, L. (2013b). *Zrod vedy ako lingvistická udalosť. Galileo, Descartes a Newton ako tvorcovia jazyka fyziky*. Praha: Filosofia.

Kvasz, L. (2015). *Inštrumentálny realizmus*. Praha: Pavel Mervart.

Platón. (1992). *Euthydémos, Menón*. Praha: Oikoymenh.

Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothése*. Paris: Flammarion.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley.

Rendl, M. (2008). O konstruktivismu ve vyučování matematiky. *Pedagogika, 58*(2), 167–203.

Rendl, M., & Štech, S. (2012). Should Learning (Mathematics) at School Aim at Knowledge or at Competences? *Orbis Scholae, 6*(2), 23–39.
Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Ernst Klett.
Szabó, A. (1978). *Beginnings of Greek Mathematics*. Budapest: Akadémia Kiadó.
Šíp, R. (2015). Pedagogika a paradigmatický obrat v metodologii teorii. *Pedagogická orientace, 25*(5), 671–699.
Štech, S. (2011). PISA – nástroj vzdělávací politiky nebo výzkumná metoda? *Orbis Scholae 5*(1), 123–134.
Štech, S. (2013). Když je kurikulární reforma evidence-less. *Pedagogická orientace, 23*(5), 615–633.
Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin: Springer.
Vopěnka, P. (2000). *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha: Práh.
Wittgenstein, L. (1989). *Tractatus Logico-philosophicus*. Frankfurt am Main: Suhrkamp. (Slovenský preklad P. Balka a R. Maca Bratislava: Kalligram, 2003.)

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.,
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
ladislav.kvasz@pedf.cuni.cz