Genetický konštruktivizmus vo svetle inštrumentálneho realizmu

Ladislav Kvasz

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta a Filosofický ústav

Akademie věd České republiky

Abstrakt: Inštrumentálny realizmus sme predstavili ako epistemologickú koncepciu zameranú na analýzu zmien jazyka matematiky. Podľa tejto koncepcie je možné odlíšiť zmeny jazyka štyroch rozličných druhov. Z pohľadu inštrumentálneho realizmu je úlohou vyučovania matematiky v kognitívnom systéme žiaka navodzovať zmeny všetkých štyroch druhov. Rôzne prístupy k vyučovaniu matematiky (konštruktivizmus, realistická matematika, hermeneutický prístup, genetická metóda) sa líšia tým, aký didaktický význam prikladajú jednotlivým druhom zmien. Kvalitu určitého prístupu k vyučovaniu matematiky môžeme posudzovať aj podľa toho, ako úspešne navodzuje v mysli žiaka zmeny každého z uvedených druhov. Vychádzame z predpokladu, že kognitívne zmeny, ktoré učiteľ pri vyučovaní matematiky navodzuje v mysli žiaka, sú svojou povahou príbuzné s kognitívnymi zmenami, ku ktorým došlo v mysliach matematikov, ktorí pojmy, postupy a poznatky, ktoré žiakov dnes učíme, objavovali. Ak je tento predpoklad správny, umožňuje nám znalosť dejín uvedomiť si zložitosť zmien, ktoré sa učiteľ usiluje navodiť v myslení žiaka. Cieľom článku je analýza genetického konštruktivizmu z pohľadu inštrumentálneho realizmu. Chceme ukázať, že genetický konštruktivizmus obsahuje didaktické prostriedky na to, aby v mysli žiaka navodil autentické kognitívne zmeny všetkých štyroch druhov. Naša analýza je druhom epistemologickej rekonštrukcie, zameranej na konceptuálnu stavbu genetického konštruktivizmu. Preto nevypovedá o empirickom obsahu skúmanej teórie, avšak veríme, že upresnenie nášho porozumenia epistemologickej štruktúre skúmanej teórie umožní vytvoriť si jasnejšiu predstavu o parametroch, ktoré bude treba zohľadniť pri jej empirickom skúmaní.

Kľúčové slová: didaktika matematiky, genetický konštruktivizmus, Hejného metóda, didaktické prostredia, generický model

Genetic Constructivism in the Light of Instrumental Realism

Abstract: We introduced instrumental realism as an epistemological approach aimed at analysing changes in the language of mathematics. According to this approach, we can distinguish changes of language of four different kinds. From the perspective of instrumental realism, the task of mathematics education is to induce changes of all four kinds in the learner's cognitive system. Different approaches to mathematics education (constructivism, realistic mathematics, hermeneutic approach, genetic method) differ in the didactic importance they attach to each kind of these changes. The quality of an approach can thus be judged by how successfully it induces each of these kinds of change in the learner's mind. We assume that the cognitive changes that a teacher induces in the mind of a pupil when teaching mathematics are analogous to the cognitive changes that occurred in the minds of the mathematicians who discovered the concepts, procedures, and knowledge that we teach pupils today. If this assumption is correct, a knowledge of history enables us to realize the complexity of the changes that the teacher seeks to induce in the mind of the

https://doi.org/10.14712/23363177.2022.17
www.orbisscholae.cz

pupil. The aim of this article is to attempt an analysis of genetic constructivism from the perspective of instrumental realism. We want to show that genetic constructivism contains the didactic means to induce authentic cognitive changes of all four kinds in the pupil's mind. Our analysis is a kind of epistemological reconstruction, focusing on the conceptual structure of genetic constructivism. It is therefore not indicative of the empirical content of the theory under investigation, but we believe that refining our understanding of the conceptual structure of genetic constructivism will allow developing a clearer picture of the parameters that will need to be taken into account in its empirical scrutiny.

Keywords: didactics of mathematics, genetic constructivism, Hejny's method, didactic environments, generic model

Myšlienka napísať predkladaný text sa zrodila pri práci na článku *Pytagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky* (Kvasz, 2017), keď sme pochopili súvis medzi *procesom idealizácie* (ktorého druhé štádium je v prípade matematiky tvorené práve pythagorejskou náukou) a mechanizmom *genézy matematického poznania* od izolovaných modelov cez generický model až k objavu poznatku (ktorý tvorí jeden z pilierov genetického konštruktivizmu[1]). Uvedomili sme si, že tri etapy tohto mechanizmu – izolované modely, generický model, objav poznatku – vystihujú povahu etáp procesu idealizácie, ktoré v prípade matematiky zodpovedajú thaletovskej, pythagorejskej a euklidovskej etape jej rozvoja.

Ako sme zdôraznili (Kvasz, 2020, s. 13), z kognitívneho hľadiska je možné vyučovanie matematiky chápať ako systematické úsilie navodiť v myslení žiaka určitý súbor kognitívnych zmien. Navrhli sme odlíšiť štyri druhy zmien (idealizácie, re-prezentácie, objektácie a re-formulácie), ktoré sme stručne opísali.[2] Jednotlivé druhy zmien sa od seba odlišujú hĺbkou premien, ktoré v myslení žiaka vyvolávajú, ako aj v dĺžke času, ktorý na ich úspešné navodenie potrebujeme. Objav súvislosti medzi procesom idealizácie a mechanizmom genézy matematického poznania v genetickom konštruktivizme nás priviedol k myšlienke pozrieť sa, či je možné aj pre zvyšné tri typy zmien (teda pre re-prezentácie, objektácie a re-formulácie) nájsť ich didaktický ekvivalent v rámci genetického konštruktivizmu. Naše úsilie bolo korunované úspechom a tak sa pokúsime ukázať, že genetický konštruktivizmus obsahuje didaktické nástroje, o ktorých sme presvedčení, že umožňujú vyvolať v myslení žiaka zmeny všetkých štyroch druhov.

Predkladaný článok prináša *epistemologickú analýzu* genetického konštruktivizmu z hľadiska inštrumentálneho realizmu. Je preto druhom konceptuálnej analýzy, akú možno ako prvý predložil Ernst Mach roku 1883 v knihe *Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Historisch-Kritisch dargestellt*. Túto metódu hlbšie rozpracovali členovia

[1] Termín *genetický konštruktivizmus* sme zaviedli na označenie Hejného metódy (Kvasz, 2016).

[2] Zmeny, o ktorých tu hovoríme, sú rozsiahle zmeny kognitívneho štýlu. V inštrumentálnom realizme využívame *stopy*, ktoré určitá zmena zanechá *v jazyku*, na jej detekciu a identifikáciu. Ale samotné zmeny sú, samozrejme, omnoho širšie a hlbšie a ich analýza preto vyžaduje komplexný prístup. Zameranie sa na jazyk matematiky je len nástrojom analýzy, ktorého cieľom je danú zmenu nájsť a odlíšiť od zmien iných druhov, vďaka tomu, že rôzne druhy zmien zanechávajú v jazyku stopy rôznej povahy.

Viedenského krúžku Moritz Schlick a Rudolf Carnap. Od čias Viedenského krúžku došlo v epistemológii k sémantickému a následne k pragmatickému obratu, takže dnešné epistemologické prístupy, medzi ktoré patrí aj inštrumentálny realizmus, svoju analýzu zameriavajú nielen na syntaktické vzťahy medzi pojmami teórie, ale aj na ich sémantický obsah a ukotvenie v inštrumentálnej praxi. Avšak zmysel tejto analýzy ostáva od čias Macha nezmenený – porozumieť vzájomnej previazanosti jednotlivých prvkov teórie tak, aby bolo možné ich empirické testovanie. Z tohto hľadiska predstavuje Machov príspevok asi neprekonateľný ideál, keď poukázaním na skutočnosť, že pojmy absolútneho času a priestoru sú v Newtonovej mechanike bez akejkoľvek epistemologickej funkcie, inšpiroval Alberta Einsteina k ich empirickému ukotveniu, a tak prispel ku vzniku špeciálnej teórie relativity. Je málo pravdepodobné, že epistemologické analýzy genetického konštruktivizmu povedú k tak prevratným dôsledkom, veríme však, že každému serióznemu empirickému testovaniu určitej teórie by mala predchádzať jej epistemologická analýza.

1 Pojem idealizácie v genetickom konštruktivizme – metóda izolovaných modelov, generického modelu a objavu poznatku

Zdá sa, že Vít Hejný (1904–1977) dospel pozorovaním detského myslenia k pochopeniu zákonitostí procesu idealizácie a toto poznanie zabudoval do genetického konštruktivizmu ako proces vedúci od stimulácie, cez vznik separovaných modelov,[3] vznik univerzálneho modelu až k objavu poznatku, jeho kryštalizácii a automatizácii:

> stimulácia — separované modely — univerzálny model — poznatok — kryštalizácia — automatizácia

Didaktická teória idealizácie bola pod názvom *genéza matematického poznatku* zverejnená v publikácii *Pracovné materiály školiaceho pracoviska Tábora Mladých Matematikov* (Hejný & Hejný, 1977/2012, s. 56). O jedenásť rokov neskôr vo vysokoškolskej učebnici *Teória vyučovania matematiky 2* bola nazvaná *mechanizmus poznávacieho procesu*, pričom stimulácia bola premenovaná na motiváciu (Hejný a kol., 1988, s. 23).[4] O ďalších šestnásť rokov, v publikácii *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, sa hovorí o *mechanizme nadobúdania matematického poznatku*, termín univerzálny model je zmenený na generický model a automatizácia je vynechaná (Hejný, 2004, s. 27–29). Nakoniec v monografii *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně* bol termín separované mo-

[3] V článku okrem iného sledujem aj vývoj terminológie, takže pre to, čo sa dnes označuje termínom *izolované modely*, uvádzam aj pôvodný termín *separované modely*, pomocou ktorého bol tento pojem pôvodne zavedený.

[4] Slovo *stimul* je odvodené od latinského *stimulus*, čo bol názov pre bodec slúžiaci na poháňanie otrokov, takže navodzuje predstavu vonkajšej pohnútky. Termín *motív* je v tomto ohľade neutrálny.

 dely zmenený na izolované modely (Hejný, 2014, s. 40).[5] Takže výsledná schéma vyzerá nasledovne:

motivácia — izolované modely — generický model — abstraktný poznatok — kryštalizácia

Porovnaním oboch schém vidíme, že v priebehu 37 rokov od 1977 po 2014 sa terminologicky zmenila prakticky každá zložka.[6] Odhliadnuc od terminologických zmien však mechanizmus ostáva nemenný a môžeme sa pokúsiť ukázať, že uvedený mechanizmus predstavuje *rekonštrukciu procesu idealizácie v mysli žiaka*. Aby sme pochopili vzťah mechanizmu k procesu idealizácie, potrebujeme trocha teórie.

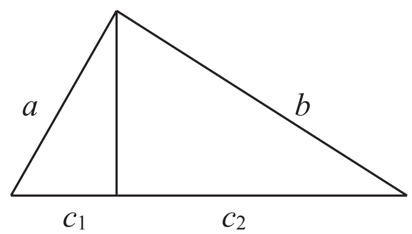
Separované modely sú separované nie preto, že by ich tvorcovia chceli niečo separovať, ale preto, že *jazyk* prvej etapy idealizácie *neobsahuje prostriedky umožňujúce skladobnú a deduktívnu syntézu*. Etapa separovaných modelov v myslení žiaka je paralelou thaletovskej geometrie. Thaletova geometria sa vyznačovala tým, že dokázala opísať iba izolované objekty a ich vlastnosti, ale nedokázala tieto objekty spájať do zložitejších celkov (t. j. chýbala jej skladobná syntéza) a nedokázala jednotlivé argumenty spájať do reťazca kauzálnych súvislostí, ako to bežne robíme pri dôkaze (t. j. chýbala jej deduktívna syntéza). Túto pozoruhodnú vlastnosť Thaletovej matematiky si môžeme uvedomiť, keď si pripomenieme šesť matematických poznatkov, tradične pripisovaných Thaletovi. Prvé štyri uvádza Proklos v *Komentári k prvej knihe Euklidových Základov* (Proclus, okolo 450 n. l. /1992), zvyšné sú od Diogena Laertského (okolo 300 n. l. /1954) z jeho *Životopisov významných filozofov*:

T1: Priemer delí kruh na dve rovnaké časti.
T2: Oproti zhodným stranám ležia v trojuholníku zhodné uhly.
T3: Vrcholové uhly sú zhodné.
T4: Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom, sú zhodné.
T5: Určenie výšky pyramídy zmeraním dĺžky jej tieňa vtedy, keď má predmet rovnakú dĺžku ako jeho tieň.
T6: Každý uhol nad priemerom je pravý.

Každé z týchto tvrdení sa týka jedného objektu (kruhu, trojuholníka) a tvrdí rovnosť jeho určitých aspektov či častí (polkruhov, uhlov). Môžeme si tiež všimnúť, že k tomu, aby sme tieto tvrdenia dokázali, stačí nahliadnuť zhodnosť, ktorá je dôsledkom symetrie útvaru, ktorého sa tvrdenie týka. Keď si túto zhodnosť všimneme, tvrdenie sa stáva evidentným. Teda útvary, o ktorých hovorí thaletovská matematika, sú nezložené, a ich dôkazy majú jeden krok. Etapu separovaných modelov by sme preto mohli vymedziť ako *etapu bez skladobnej a deduktívnej syntézy jazyka*.

[5] V angličtine slovo *separated* navodzuje predstavu niečoho, čo bolo pôvodne spojené a až následne došlo k jeho rozdeleniu. Slovo *isolated* túto konotáciu nemá.

[6] Prehľad terminologických zmien uvádzam preto, aby čitateľ, ktorý sa stretol s niektorou z týchto verzií, nebol zmätený. V článku sa budem držať pôvodnej terminológie z roku 1977. Nechcem spochybňovať motívy vedúce ku zmenám terminológie, pôvodnou terminológiou však chcem zvýrazniť čas, ktorý uplynul od vzniku teórie.



Obrázok 1 Dôkaz Pythagorovej vety

Univerzálny model nie je jedným zo separovaných modelov, ktorému sa pridá nejaká záhadná univerzálnosť. Je to model, ktorý sa stal univerzálnym preto, lebo v jeho rámci sa po prvý raz podarilo zaviesť skladobnú a deduktívnu syntézu. Vďaka tejto skladobnej a deduktívnej syntéze sa zdá (alebo aspoň tvorcom univerzálneho modelu sa zdalo), že univerzálny model dokáže namodelovať situáciu každého jednotlivého separovaného modelu, a to spôsobom, pri ktorom je možné prvky spájať do zložitejších celkov a argumenty radiť do komplikovaných argumentačných schém. V dejinách matematiky univerzálnemu modelu zodpovedá pythagorejská matematika. Pythagorejci verili, že podstatu každého javu (ako pravouhlosť trojuholníka alebo zvuk kvinty) je možné vyjadriť pomocou čísel. Čísla a ich pomery sa tak stali nositeľom skladobnej a deduktívnej syntézy jazyka matematiky.

Skladobnú a deduktívnu syntézu pythagorejskej matematiky ukážeme na dôkaze Pythagorovej vety. Obrázok 1 použitý van der Waerdenom (1979, s. 358) pri dôkaze obsahuje jednu pomocnú čiaru, ktorá delí trojuholník na dva podobné. Dôkaz pozostáva z evidencií a kalkulatívnych krokov. Najprv z podobnosti malého trojuholníka s celým dostávame

$$a : c_1 = c : a, \qquad \text{preto} \qquad a^2 = c \,.\, c_1 \tag{1}$$

a analogicky

$$b : c_2 = c : b, \qquad \text{preto} \qquad b^2 = c \,.\, c_2. \tag{2}$$

Sčítaním oboch identít uvedených vpravo máme

$$a^2 + b^2 = c \,.\, c_1 + c \,.\, c_2 = c \,.\, (c_1 + c_2) = c^2. \tag{3}$$

V dôkaze máme do činenia so štyrmi krokmi: 1. Podobnosť trojuholníkov zapíšeme ako rovnosť *pomerov* dĺžok zodpovedajúcich strán. 2. Tieto pomery *upravíme* pomocou princípu, podľa ktorého súčin vonkajších členov pomeru je rovný súčinu jeho vnútorných členov. 3. Takto vzniknuté identity *sčítame*. 4. Výsledok *upravíme* podľa distributívneho zákona.

Oproti thaletovskej matematike tu je zrejmá prítomnosť *skladobnej syntézy* prvkov útvaru (menších trojuholníkov, ktorých *spojením*, zachovávajúcim pomery vzniká veľký trojuholník – viď obr. 1) ako aj *deduktívna syntézu* jednotlivých krokov argumentácie (aritmetických úprav, ktorých *spojením* vzniká dôkaz). Oba druhy syntézy sa zakladajú na aritmetike. Geometrické útvary sú zasadené do vzťahov vyjadrených pomocou aritmetických pomerov dĺžok strán a dôkaz spočíva v aritmetických úpravách týchto pomerov. Okrem toho Pythagorova veta už netvrdí rovnosť a nevypovedá o jedinom objekte, ako to bolo v prípade Thaleta. Veta hovorí o štvorcoch nad stranami pravouhlého trojuholníka, dáva teda do vzájomného vzťahu tri objekty. Ani jej dôkaz už nespočíva v bezprostrednom nahliadnutí symetrie daného útvaru a následnom uvedomení si rovnosti jeho súmerne združených čŕt. Práve naopak, dôkaz má štyri rôzne druhy krokov. Z nich prvé dva sa opakujú dvakrát – raz pre menší, raz pre väčší z dvoch trojuholníkov. Ak prijmeme tézu, že pythagorejská matematika korešponduje univerzálnemu modelu, tak vidíme, že čo je na univerzálnom modeli univerzálne, je univerzálnosť jeho skladobnej a deduktívnej syntézy.

Pritom ako skladobná, tak aj deduktívna syntéza sú do uvedeného dôkazu vnesené zvonka (t. j. z oblasti mimo geometrie) pomocou čísel. Čísla umožňujú podobnosť trojuholníkov vyjadriť v jazyku aritmetiky ako pomery ich strán, t. j. zachytiť vzťahy medzi jednotlivými prvkami, ktoré tvoria výsledný útvar (preto hovoríme o skladobnej syntéze). A čísla umožňujú tiež od jedného vyjadrenia daného vzťahu prejsť k ďalším (pomocou pravidiel teórie proporcií resp. pomocou sčítania dvoch rovností) a tak odvodiť výsledný vzťah (preto hovoríme o deduktívnej syntéze). Ale, ako sa onedlho ukázalo, je tento postup v mnohých prípadoch (keď sú strany trojuholníka nesúmerateľné, teda napríklad keď máme rovnoramenný pravouhlý trojuholník) iba ilúziou. Preto ide len o model, o systém, ktorý niekedy správne reprezentuje situáciu, ale vo všeobecnosti nefunguje.

Poznatok vznikne z tohto odvodenia, až keď Euklides nahradí skladobnú a deduktívnu syntézu, založenú na aritmetike, skladobnou syntézou založenou na geometrickej konštrukcii (ktorá sa opiera o päť postulátov) a deduktívnou syntézou vo forme diskurzívneho dôkazu (ktorý sa opiera o axiómy). Tak Euklidova druhá axióma: „A ak sa k rovnako veľkým veciam pridajú rovnako veľké veci, tak sa celky rovnajú“ (Euklides, okolo 300 pred n. l./2011, s. 117), umožní prejsť od vzťahov (1) a (2) k výslednému vzťahu (3) bez predpokladu, že a, b, c sú čísla (teda bez predpokladu, že ide o súmerateľné veličiny). Prechod od univerzálneho modelu k poznatku tak možno v reči inštrumentálneho realizmu charakterizovať ako prechod od situácie, v ktorej je skladobná a deduktívna syntéza obmedzená špeciálnymi podmienkami modelu, k situácii, v ktorej sú obe syntézy nezávislé od akéhokoľvek (skrytého) predpokladu implicitne obsiahnutého v konštrukcii modelu. Euklides nahradil aritmetiku ako základ skladobnej syntézy *geometrickou konštrukciou* a výpočet ako základ deduktívnej syntézy *logickou argumentáciou*.

Zdá sa, že etapa charakterizovaná *absenciou skladobnej a deduktívnej syntézy*, je zákonitým a nevyhnutným prvým krokom procesu idealizácie. Je to etapa, ktorú Vít Hejný označil termínom separované modely a zodpovedá štádiu, v ktorom kognitívny systém žiaka je schopný vyčleniť a fixovať ideálne objekty iba jednotlivo a izolovane. Keď si pripomenieme význam, ktorý tradícia pripisuje Thaletovi pre rozvoj matematiky (podľa Prokla bol Thales prvým matematikom, ktorý svoje tvrdenia dokázal, a tak vlastne založil matematiku ako deduktívnu disciplínu), vidíme, že etapa separovaných modelov je veľmi dôležitá. Žiaci sa musia najprv naučiť ideálne objekty kognitívne vyčleniť, t. j. mentálne ich izolovať[7], a následne sa musia naučiť s týmito izolovanými objektami mentálne manipulovať. Zdá sa, že táto úloha je kognitívne tak náročná, že na nejakú skladobnú či deduktívnu syntézu neostáva síl. Keď žiakom neumožníme, aby mohli dostatočne dlho a dostatočne podrobne pracovať s rôznorodými separovanými modelmi, ale ich od začiatku nútime, aby ideálne objekty uvažovali spojené pomocou princípov skladobnej a deduktívnej syntézy, *znemožníme kognitívnu fixáciu ideálnych objektov* a tým zamedzíme nástupu procesu idealizácie. Na to, aby bolo možné trojuholníky spojiť, musia byť mentálne dostatočne stabilné. A vytvoriť mentálne stabilné ideálne objekty je základnou úlohou etapy separovaných modelov. Podľa zástancov genetického konštruktivizmu tento proces sa nedá urýchliť ani preskočiť. Pre pochopenie všetkého ďalšieho je úplne zásadný.

Aj etapa charakterizovaná *protetickou* skladobnou a deduktívnou syntézou (teda skladobnou a deduktívnou syntézou založenou na konkrétnom modeli, o ktorom sa zanedlho ukáže, že nemôže fungovať) je veľmi dôležitou druhou etapou procesu idealizácie. Je to etapa, ktorú Vít Hejný označil termínom univerzálny model. V jej priebehu kognitívny systém žiaka nie je schopný prijať *skutočnú* skladobnú ani deduktívnu syntézu (kvôli ich nevyhnutnej abstraktnosti) a vypomáha si konkrétnym spôsobom, pomocou ktorého do jedného z modelov skladobnú a deduktívnu syntézu zabuduje. Nesmieme zabúdať, že čísla, pomocou ktorých pythagorejci vniesli do geometrie skladobnú a deduktívnu syntézu, sa ukázali ako ilúzia. Objav nesúmerateľnosti túto ilúziu odhalil. Ale aj napriek tomu, že sa nakoniec zrútil, bol systém pythagorejskej matematiky dôležitou etapou vo vývine matematiky, lebo pythagorejci ako prví pochopili možnosť univerzálnej matematiky, možnosť použiť matematický spôsob opisu na všetky javy.

Keď už raz bola skladobná a deduktívna syntéza dosiahnutá, objav toho, že čísla ako základ tejto syntézy nefungujú, nemal za následok opustenie syntézy, ale iba opustenie čísel ako jej nositeľa. Matematici sa usilovali skladobnú a deduktívnu syntézu geometrie urobiť nezávislou od čísel. To sa podarilo Euklidovi a viedlo to ku kognitívnej zmene, ktorej výsledkom je geometria ako náuka skúmajúca ideálne geometrické objekty. Dôrazom na separované modely a univerzálny model Vít Hejný vlastne tvrdí, že aby sme u detí vybudovali autentické matematické poznanie, deti musia prejsť procesom idealizácie. Je to radikálna téza, podľa ktorej základom vyučovania matematiky musí byť prepojenie sveta ideálnych objektov matematiky

[7] Zdá sa, že termín *izolované modely*, ktorým je od roku 2014 nahradený starší termín *separované modely*, je výstižný, a tak uvedené nahradenie je plne oprávnené. To, že ho v tejto stati nepoužívam, je dané výlučne snahou nenechať terminologickým otázkam zastrieť kognitívnu podstatu veci.

so svetom dieťaťa. Tento proces Petr Vopěnka nazval *otvorením sa geometrického sveta* (2003, s. 23).[8]

Ako sme uviedli v (Kvasz, 2020, s. 14), väčšina matematikov prešla procesom idealizácie v detstve, a preto si *idealizáciu neuvedomuje* – ideálny charakter matematických objektov *je pre nich samozrejmosťou*. Mnohí z nich majú dojem, že ideálne objekty matematiky, ako sú čísla, geometrické tvary či algebraické štruktúry, sa nachádzajú priamo v realite. Ak určitý predmet má tvar, tak ho má v matematickom zmysle tohto slova – ako dokonalú geometrickú formu. Cieľ vyučovania matematiky vidia v tom žiakov naučiť tieto tvary pomenovať a poznať ich vlastnosti. Neuvedomujú si, že najradikálnejšou kognitívnou zmenou, ktorou dieťa pri učení sa matematike musí prejsť, je naučiť sa tieto tvary kognitívne vyčleniť a stabilizovať. Preto viacero didaktických prístupov kladie dôraz na nácvik práce s ideálnymi objektmi (t. j. počítaniu, geometrickým konštrukciám, algebraickým úpravám), ale vytvoreniu príslušných ideálnych objektov v mysli žiaka venuje len malú pozornosť. Žiaci, ktorí proces idealizácie spontánne zvládnu, rozumejú tomu, čo učiteľ hovorí, pretože pre nich je úsečka navždy úsečkou geometrickou (t. j. euklidovskou), a nie čiarou narysovanou podľa pravítka (t. j. thaletovskou). Schopnosť prepojiť thaletovskú úsečku narysovanú na papieri, ktorá má určitú hrúbku, okraje a farbu, s geometrickou úsečkou, ktorá žiadnu hrúbku, okraje ani farbu nemá, sa dá naučiť, a teória, ktorú Vít Hejný nazval genézou matematického poznatku, vysvetľuje ako.

Samozrejme, genetický konštruktivizmus nie je jediným prístupom, ktorého tvorcovia chápu existenciu týchto dvoch svetov – reálneho a ideálneho – a rozpoznali nutnosť ich prepojenia.[9] Asi najznámejším prístupom usilujúcim o dosiahnutie podobných cieľov je prístup Hansa Freudenthala, nazývaný *realistická matematika*. Prepojenie matematiky s realitou sa v ňom chápe ako jedna z najdôležitejších úloh didaktiky matematiky (pozri Freudenthal, 1973, 1983 alebo 1991). Rovnako sem môžeme zaradiť model geometrického poznania Pierra van Hieleho (1986), ktorý Zbigniew Semadeni (2018) porovnáva s prístupom M. Hejného. Ale na druhej strane si musíme uvedomiť, že prístupov pracujúcich s procesom idealizácie nie je mnoho.

Čitateľ sa môže sám presvedčiť, že väčšina učebníc matematiky je napísaná tak, že rozdiel medzi geometrickou úsečkou a úsečkou narysovanou na papieri neberie do úvahy a tvári sa, ako keby uvidieť za čiarou nakreslenou na papieri geometrickú úsečku bolo čosi triviálne, čo nestojí ani za zmienku. Sme presvedčení, že toto je to miesto, kde pre matematiku strácame dve tretiny bežnej populácie. Patria k nim všetci, ktorí ten rozhodujúci krok, o ktorom píše Vopěnka (2003, s. 23), urobiť bez

[8] Edmund Husserl v tejto súvislosti neustále zdôrazňoval, že musíme vytvoriť autentický kontakt s pôvodnou matematickou skúsenosťou, to jest tradíciu musíme desedimentovať.

[9] Nástroj na skúmanie miery integrácie rôznych aspektov poznania u žiaka, ako aj dôsledkov ich neprepojenosti ponúka tzv. Cognitive Load Theory. Možno ju použiť na vysvetlenie kognitívnych problémov so zvládaním idealizácie aj re-prezentácií v matematike, keď vyjdeme z predpokladu, že kognitívne pracovať s neprepojenou ideálnou a reálnou verziou určitej matematickej situácie (resp. s jej neprepojenými reprezentáciami) zaťažuje kognitívny systém žiaka. Pozri napríklad (Derry, 2020; Kirschner et al., 2006; Sweller et al., 2011) a v domácej literatúre Slavík et al. (2017).

pomoci učiteľa nedokážu. Genetický konštruktivizmus tento problém pomenováva, teoreticky ho uchopuje a dáva mu ústredné miesto v celej didaktike matematiky.

Prepojenie reálneho sveta so svetom matematickým sa dá empiricky testovať pomocou úloh, ktoré niektorú z idealizačných podmienok porušujú, prípadne pomocou sémantických paradoxov, ktoré sú na takomto porušení založené. (Napríklad rôzne varianty Zenonových paradoxov s pohybom alebo Parmenidovho vyvrátenia mnohosti.) Bolo by možné pokúsiť sa empiricky overiť, že žiaci, ktorí sa matematiku učili v rámci genetického konštruktivizmu, by mali byť schopní sa v podobných paradoxoch lepšie orientovať. Úlohy tohto typu nie sú pri bežnom testovaní matematických znalostí používané, ale pri testovaní účinnosti, s akou genetický konštruktivizmus prepojuje idealizovaný svet matematiky s realitou, by tu mohli vzniknúť signifikantné rozdiely.

2 Pojem re-prezentácie v genetickom konštruktivizme – metóda didaktických prostredí

Didaktické problémy súvisiace s navodením re-prezentácie v mysli žiaka sú v istom zmysle opačné ako problémy spojené s procesom idealizácie. V prípade problémov súvisiacich s idealizáciou ide o to, že žiaci nedokážu v reálnom objekte rozpoznať jeho matematickú štruktúru. V prípade re-prezentácie je problém opačný – žiak sa naučí pracovať s matematickou symbolikou, ale nedokáže ju použiť v reálnej situácii. Symbolika je v jeho očiach samoúčelná a so skutočnosťou nemá nič spoločného. Teda v prípade problémov s idealizáciou žiak vidí realitu, ale nevidí jej matematickú formu. V prípade re-prezentácie zas zvláda matematický formalizmus, ale nevidí jeho prepojenie so skutočnosťou.

Problémy s navodením re-prezentácie môžu mať svoje korene aj v tom, že niektorí didaktici matematiky si zdĺhavý a zložitý proces, vedúci ku vzniku určitej reprezentácie[10], nie vždy v dostatočnej miere uvedomujú. Jednotlivé matematické javy, objekty a vzťahy chápu pomocou dnešného, plne rozvinutého symbolického jazyka.

[10] Re-prezentáciou rozumiem proces zmeny, kým reprezentáciou rozumiem výsledok tohto procesu. Príkladom reprezentácie je jeden zo systémov geometrie – syntetická, analytická či fraktálna; re-prezentáciou je prechod medzi nimi, teda napríklad prechod od syntetickej geometrie k analytickej. Mohlo by sa zdať, že syntetická a analytická geometria sú odlišné prístupy ku geometrickým objektom. Faktom ale je, že viaceré krivky, ktorých systematické štúdium priniesla až analytická geometria, boli známe už v antike (napríklad konchoida, cissoida, špirála, či kvadratrix), takže niektoré objekty analytickej geometrie boli prístupné skúmaniu syntetickými metódami. Navyše, svet objektov syntetickej geometrie tvorí kvadratickú časť univerza analytickej geometrie. Preto je prirodzenejšie vnímať analytickú geometriu ako určité rozšírenie a zovšeobecnenie metód syntetickej geometrie. Dôležité je, že tam, kde sa obe geometrie prekrývajú, vedú ich metódy ku zhodným výsledkom, takže ich prístupy sú kompatibilné. Niečo podobného platí aj pre rozhranie medzi analytickou a fraktálnou geometriou. Fraktály vznikajú ako limitné objekty iteratívneho procesu. Pokiaľ pri prechode k limite budeme požadovať nielen bodovú konvergenciu, ale aj konvergenciu prvej a druhej derivácie, výsledný objekt bude analytickou krivkou, teda objektom analytickej geometrie. Preto svet analytickej geometrie tvorí „hladkú časť" univerza fraktálnej geometrie (tak ako svet syntetickej geometrie je kvadratickou časťou univerza analytickej geometrie).

Výuka matematiky založená na systematickom používaní výlučne jej *súčasného jazyka* sťažuje žiakom *prejsť procesom re-prezentácie*, ktorý viedol ku vzniku tohto jazyka. Žiaci si tak často neuvedomujú, čo je na určitej reprezentácii konvenciou, teda vecou dohovoru, a čo je matematickým faktom, teda skutočnosťou od ľudských konvencií nezávislou.

Jedným z faktorov, ktorý prispieva k tomu, že si mnoho matematikov proces re-prezentácie neuvedomuje, je, že texty z minulosti sú, kvôli ich lepšej zrozumiteľnosti, väčšinou prepisované do dnešnej symboliky. Stačí si pozrieť moderné vydania diel (ako Cardano, 1545/1968; Viéte, 1591/1983), aby sme si uvedomili, že sú prepísané do súčasnej algebraickej symboliky, pochádzajúcej od Descarta. To ale znamená, že cestu, ktorá viedla ku vzniku modernej symboliky, tieto vydania zastierajú. Aby sme si uvedomili časový horizont a komplexnosť zmien, ktoré takéto prepisovanie zastiera, uviedli sme (Kvasz, 2020, s. 18–23) niekoľko úryvkov z historických textov dokumentujúcich cestu, ktorú algebra prešla, kým vznikla naša symbolika. Asi najprekvapujúcejšie sú dejiny symbolu pre odmocninu, ktorý vznikol súhrou jedenástich zmien. Štyri majú povahu *zavedenia* novej črty symbolického jazyka (ako napríklad zavedenie indikátora rozsahu pôsobenia operácie odmocniny), tri majú povahu *premeny* určitej konvencie (ako napríklad premena indikátora stupňa z písmena na číslo), tri majú podobu *nahradenia*, keď sa určitá konvencia zmení ale zachová si charakter (ako napríklad nahradenie pravého horného indexu ako indikátora stupňa odmocniny ľavým horným indexom) a posledným krokom je zrastenie všetkých opísaných aspektov do jediného symbolu (Kvasz, 2020, s. 29–30). Keď si tieto zmeny uvedomíme, začíname chápať, prečo žiakom robí problém algebraické symboly spojiť s realitou, ktorú symboly reprezentujú. Vytvorenie symboliky bol zložitý a zdĺhavý proces. Školská prax ho často redukuje na uvedenie výsledného symbolu, čím žiakom sťažuje jej zvládnutie.

V genetickom konštruktivizme je proces re-prezentácií prítomný vo forme *plurality didaktických prostredí*, pomocou ktorých si žiaci osvojujú určitý matematický obsah (napríklad riešenie rovníc). Tým, že sa ten istý matematický problém formuluje a rieši v (z pohľadu žiaka) diametrálne odlišných prostrediach, dosiahneme, že v ideálnom prípade žiaci kognitívne prechádzajú podobným procesom, ako bol proces objavovania rôznych aspektov symbolu pre odmocninu. Čiastočné riešenia problému symbolického vyjadrenia odmocniny u Regiomontana, Chuqueta, Pacioliho, Cardana, Stifela a Descarta možno tiež považovať za určité *prostredia* – síce nie didaktické, ale *heuristické*. V každom prostredí vystupuje do popredia iný aspekt, takže postupným prepájaním prostredí sa rodí skúsenosť so znakmi rôznych druhov. Okrem toho jednotlivé prostredia sú sformulované prostriedkami bežného jazyka a žiaci sú vedení k tomu, aby vytvorili vlastnú symbolizáciu problému.

Pluralitou prostredí dosiahneme jednak to, že v rámci genetického konštruktivizmu sa u žiakov symbolika rodí postupne, v úzkej nadväznosti na bežný jazyk. Preto rastie pravdepodobnosť, že v kognitívnom systéme žiakov dôjde k prepojeniu verbálnej reprezentácie problému (ktorá zodpovedá *rétorickej algebre*), pokusov o jeho riešenie pomocou rôznych lokálnych systémov skratiek (ktoré zodpovedajú *synkopickej algebre*), až sa nakoniec dospeje k jeho *symbolickej reprezentácii*. Okrem prepojenia verbálneho a symbolického spôsobu reprezentácie matematických úloh je dôležité aj to, že v rôznych prostrediach je prirodzené určitý obsah formálne vyjadriť rôznymi spôsobmi, preto žiaci môžu zažiť proces postupného zrastania rôznych aspektov symbolu. Tento proces sme ilustrovali na príklade symbolu pre odmocninu. Podobných symbolov má algebra mnoho, takže čitateľ si môže vedľa príkladu ilustrujúceho vývin symbolu pre odmocninu predstaviť analogickú rekonštrukciu vývoja symbolického vyjadrenia *mocnín* neznámej, počtových *operácií*, relácie *rovnosti*, zápisu *zlomkov*, *zátvoriek*, *polynómov*, *záporných čísel* a ďalších. Prakticky u každého matematického symbolu možno nájsť *zavedenia*, *premeny*, *nahradenia* a *zrastanie* jeho rôznych aspektov.

Osvojenie si algebraickej symboliky je radikálna transformácia kognitívneho systému žiaka. Náročnosť tejto transformácie si niektoré prístupy k didaktike matematiky neuvedomujú. Výsledkom je bezradnosť učiteľov i žiakov tvárou v tvár slovným úlohám. Genetický konštruktivizmus dáva bohatstvu a rôznorodosti symbolických prostredí centrálne miesto v celom didaktickom systéme. To, že mnohí didaktici matematiky genetický konštruktivizmus kritizujú za používanie prostredí, a niektoré prostredia (najčastejšie to je Dedo Lesoň) považujú za zbytočné, je prejavom toho, že si zložitosť procesu re-prezentácií dostatočne neuvedomujú. Prakticky v každom algebraickom symbole je skondenzované intelektuálne úsilie generácií matematikov, a osvojenie si algebraickej symboliky predstavuje zásadnú zmenu symbolického univerza, v ktorom sa žiak kognitívne pohybuje. Matematici žijú v symbolickom univerze modernej matematiky a často si nevedia predstaviť, že niekomu toto univerzum nie je prístupné. Úloha didaktiky matematiky spočíva v tom žiakom jednotlivé symbolické univerzá sprístupniť a postupne ich v týchto univerzách udomácniť.

Didaktické prostredia v zmysle genetického konštruktivizmu boli po prvý krát zavedené v publikácii *Pracovné materiály školiaceho pracoviska Tábora Mladých Matematikov* (Hejný & Hejný, 1977/2012, s. 62–65). Bolo to prostredie v zásade ekvivalentné s tým, ktoré sa dnes nazýva Dedo Lesoň, len na mieste myši nájdeme vojaka, na mieste mačky psovoda, namiesto husi guľomet, namiesto psa mínu a namiesto kozy delo. Ale princíp je rovnaký, umožniť deťom, aby sa naučili zapisovať mnohostné vzťahy v nepozičnej nedekadickej sústave. Vo vysokoškolskej učebnici *Teória vyučovania matematiky 2* (Hejný a kol., 1988) pribudlo Krokovanie, Schody a niektoré ďalšie prostredia, ktoré sú však iba spomenuté, bez toho, aby boli vysvetľované a podrobnejšie didakticky analyzované. Naproti tomu v monografii *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně* (Hejný, 2014) je podrobne zavedených jedenásť prostredí – Tajná chodba, Panáčik, Krokovanie, Schody, Autobus, Dedo Lesoň, Rodina, Algebrogramy, Násobilkové štvorce, Súčtové trojuholníky, Susedia a Šípkové grafy – a následne sú tieto prostredia analyzované z rôznych hľadísk a sú opisované ich vlastnosti. Didaktické prostredia sú tu predstavené ako kľúčový nástroj didaktiky matematiky.

Samozrejme, genetický konštruktivizmus nie je jediným prístupom k didaktike matematiky, ktorého tvorcovia si uvedomujú zložitosť procesu re-prezentácií, a preto vypracovali rôzne didaktické prostredia na navodenie rôznych aspektov jednotlivých re-prezentácií. Spomenieme predovšetkým nemeckého didaktika matematiky Ericha Wittmanna (2001, 2021), ktorý zaviedol pojem *substantial learning environments*, na základe ktorých pripravil kompletnú sériu učebníc matematiky pre prvý stupeň základných škôl. Ale podobne ako v prípade idealizácií, ani v prípade re-prezentácií neexistuje mnoho prístupov systematicky pracujúcich s pomalým a zdĺhavým procesom navodenia re-prezentácií v mysli žiaka. Mnoho didaktických prístupov sa uspokojuje s tým, že žiakom ponúkne jediné prostredie – dnešnú štandardnú matematickú symboliku a terminológiu.

Z hľadiska empirického výskumu je problematika porozumenia určitému matematickému jazyku skúmaná pod názvom epistemologických prekážok (epistemological obstacles). Pojem *epistemologickej prekážky* zaviedol Gaston Bachelard ako poznatky, ktoré si poznávajúci subjekt osvojí v jednoduchšom kontexte, kde vedú k úspešnému poznávaniu, avšak pri prechode k širšiemu kontextu začínajú byť prekážkou. Takéto prekážky existujú v každej oblasti matematiky, teda aj v aritmetike a elementárnej geometrii. Klasickou štúdiou venujúcou sa epistemologickým prekážkam je práca *Humanities students and epistemological obstacles related to limits* Anny Sierpinskej (1987) venovaná epistemologickým prekážkam súvisiacim so základnými pojmami matematickej analýzy. Bolo by možné empiricky skúmať, či žiaci, ktorí sa matematiku učili v rámci genetického konštruktivizmu, sú schopní tieto prekážky ľahšie zvládať, pretože na to boli prechodmi medzi jednotlivými prostrediami systematicky pripravovaní. Preto empirický výskum zameraný na identifikovanie a prekonávanie epistemických prekážok by mohol viesť k signifikantným rozdielom medzi rôznymi typmi vyučovania.

3 Pojem objektácie v genetickom konštruktivizme – metóda genetickej paralely

Keď cestu, ktorá v histórii matematiky viedla ku vzniku symbolickej algebry, porovnáme s tým, ako sa algebra vyučuje na základnej a strednej škole, môžeme si uvedomiť, že v dejinách *symbolickej* algebre predchádzalo obdobie *rétorickej* a *synkopickej* algebry. Školská prax tieto dve štádiá vývinu algebry často vynecháva a žiakom predkladá algebru v jej symbolickej podobe. Jednou z príčin problémov žiakov so slovnými úlohami, ktoré sa prejavujú v neschopnosti prejsť od verbálneho zadania slovnej úlohy k jej symbolickej reprezentácii, môže byť práve *vynechanie rétorickej a synkopickej algebry z vyučovania matematiky*.[11] V dejinách algebry

[11] Už aj to, že tieto úlohy nazývame *slovnými úlohami* a pomenúvame ich na základe toho, že sú sformulované verbálne, prostriedkami bežného jazyka, poukazuje na súvis s *rétorickou algebrou*. Pomenovanie „rétorická algebra“ neznamená, že by sa v rétorickej algebre používali rétorické obraty, resp. že by ju pestovali rétori. Ide skôr o skutočnosť, na ktorú poukazuje aj termín slovná úloha, totiž že je to algebra sformulovaná prostriedkami bežného jazyka. Rétorickú algebru sme z kurikula vynechali, ale problémy žiakov so slovnými úlohami tým nezanikli. Ba priam naopak, zdá sa, že vynechanie rétorickej algebry z kurikula je jednou z príčin týchto problémov.

éra rétorickej algebry trvala viac než šesť storočí, od al-Chwárizmího po Cardana, a éra synkopickej algebry trvala tri storočia siahajúce od Regiomontana po Descarta, pričom obe éry sa po dobu približne dvoch storočí prekrývali.[12] Školské osnovy tieto dôležité historické obdobia vynechávajú a žiakom predkladajú jednu jedinú hotovú symboliku.

Genetický konštruktivizmus dáva procesu postupného vzniku symboliky centrálne miesto vo vyučovaní matematiky. Žiaci sú systematicky konfrontovaní s množstvom rôznych problémov a vďaka *vlastnej intelektuálnej práci* prechádzajú kognitívnymi zmenami, ktoré zodpovedajú jednotlivým štádiám v historickom vývine algebry (teda jednotlivými objektáciami algebraického univerza). V genetickom konštruktivizme je dynamika objektácií prítomná vo forme *princípu genetickej paralely medzi fylogenézou a ontogenézou matematiky*. Nebudeme sa tejto oblasti podrobnejšie venovať (viď Kvasz, 2016, s. 27–30, kde sme uviedli, že rekonštrukcia historického vývinu matematickej disciplíny, tvoriacej náplň školského učiva, predstavuje jeden zo základných princípov genetického konštruktivizmu).

Možno povedať, že konštruktivistický aspekt genetického konštruktivizmu sa prejavuje vo vyučovaní dynamiky idealizácií, keď sa genetický konštruktivizmus dôsledne pridŕža presvedčenia, že ideálne objekty (ako je nedeliteľný bod či dokonale priama úsečka) si musí žiak skonštruovať vo svojej mysli, pričom štádiá izolovaných modelov, generického modelu a objavu poznatku sú základné štádiá tejto konštrukcie. Naopak, genetický aspekt genetického konštruktivizmu sa prejavuje vo vyučovaní objektácií a je založený na presvedčení, že k tomu, aby žiak plnohodnotne rozumel určitému pojmu, technike či teórii, musí prejsť rovnakou postupnosťou spredmetnení (t. j. objektácií) týchto pojmov, techník či teórií, akými prešla matematika v historickom procese ich objavu.

Väčšina didaktikov matematiky si proces objektácií uvedomuje a didaktická implementácia tohto procesu tvorí hlavný cieľ mnohých prístupov k vyučovaniu matematiky. Explicitne princíp genetickej paralely sformuloval roku 1926 nemecký matematik Otto Toeplitz (1926/2015, 1949). Paralela medzi jednotlivými štádiami historického vývinu poznania a kognitívneho vývine dieťaťa je dôležitým prvkom Piagetovho prístupu (Garcia & Piaget, 1989). Piaget svoj epistemologický prístup nazval genetickou epistemológiou. Systematický výklad použitia genetického prístupu v didaktike matematiky predložil Gert Schubring (1978) v práci *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Naopak kritiku použitia genetického prístupu v didaktike matematiky z pozícií heremeneutického prístupu predložil Hans Niels Jahnke (2014). Procesu spredmetnenia ako jednému zo základných procesov, ku ktorým dochádza

Genetický konštruktivizmus tým, že necháva žiakov v jednotlivých prostrediach používať prirodzený jazyk, im umožňuje porozumieť prepisu slovnej úlohy do symboliky toho ktorého prostredia.

[12] Napríklad Cardano vyslovil *všeobecné* pravidlo na riešenie rovníc tretieho stupňa verbálne (t. j. prostriedkami rétorickej algebry), ale riešenia *konkrétnych* príkladov zapisoval formulami synkopickej algebry. Je prekvapivé, že všeobecný postup vyjadruje slovne, kým jeho konkrétnu ilustráciu zapisuje formálne, ale synkopická algebra neumožnila vyjadriť rovnicu so všeobecným koeficientom.

pri vyučovaní matematiky, sa systematicky venuje Anna Sfard (Sfard, 1994; Sfard & Linchevski, 1994).

Genetický konštruktivizmus patrí ku konštruktivistickým prúdom v didaktike matematiky. Preto dôraz na *konštruovanie pojmov v mysli žiaka* ako *výsledok jeho samostatnej aktivity* pri riešení problémov je v genetickom konštruktivizme podobný tomuto dôrazu v iných konštruktivistických prúdoch (pozri napríklad Glasersfeld, 1981). Domnievame sa však, že hlavný rozdiel medzi genetickým konštruktivizmom a ostatnými konštruktivistickými prúdmi v didaktike matematiky nie je v otázke dôrazu na samostatnú aktivitu žiakov, ale v odlíšení procesov idealizácií, re-prezentácií a objektácií, z ktorých každý vyžaduje odlišný didaktický prístup. Tieto rozdiely u ostatných konštruktivistických prúdov spravidla nie sú zohľadnené, takže čo tieto prístupy u žiaka konštruujú, je zmesou rôznych prvkov, bez zohľadnenia zákonitostí každej z uvedených troch druhov zmien. To je podľa nás jedna z príčin, prečo mnohé konštruktivistické prístupy v didaktike matematiky neviedli k výsledkom, aké si zástanci konštruktivizmu od nich sľubovali. Klasické konštruktivistické prístupy boli iniciované matematikmi alebo psychológmi, ktorí si význam idealizácie ani re-prezentácie v matematike nie dostatočne jasne uvedomovali. Dobrým príkladom tejto skutočnosti je vynikajúca a dnes už klasická kniha George Pólyu (1962) *Mathematical Discovery* obsahujúca veľké množstvo pekných úloh, ktoré študentovi umožňujú samostatne objaviť množstvo matematických poznatkov. Ak študent už zvládol idealizáciu a základné re-prezentácie, z Pólyovej knihy sa môže mnohému podučiť. Ale ak študent idealizáciu a niekoľko prvých re-prezentácií nezvládol, Pólya mu nedokáže pomôcť, lebo od samého začiatku sa pohybuje v rámci univerza matematiky, ktoré zvládnutie idealizácie a niekoľkých re-prezentácií predpokladá.

Z empirického hľadiska by sa rozdiely v didaktickom prístupe na úrovni objektácií mali prejaviť pri riešení neštandardných úloh. Neštandardné úlohy, na rozdiel od sémantických paradoxov, ktoré umožňujú testovať úroveň idealizácií, a epistemologických prekážok, ktoré umožňujú testovať re-prezentácie, sú z matematického hľadiska korektne formulované úlohy (na rozdiel od sémantických paradoxov používajú pojmy v ich bežnom matematickom zmysle a neporušujú konvencie s nimi spojené) a z didaktického hľadiska nie sú v konflikte s pravidlami zjednodušeného poznávania (ako je tomu v prípade epistemologických prekážok). Vymykajú sa iba bežným úlohám, s ktorými sa žiaci stretávajú v školskej praxi. Dá sa predpokladať, že žiaci, ktorí sa matematiku učili v rámci genetického konštruktivizmu, by mali byť schopní neštandardné úlohy lepšie zvládať, pretože neboli trénovaní v riešení štandardných úloh. Ale, samozrejme, používanie neštandardných úloh je medzi učiteľmi rozšírené, takže rozdiely vo výsledkoch žiakov, ktorí boli matematiku vyučovaní v rámci genetického konštruktivizmu, a tými, čo takto vyučovaní neboli, už asi nebude signifikantný.

4 Pojem re-formulácie v genetickom konštruktivizme – metóda dialógu v triede

Re-formulácie tvoria veľkú časť náplne klasického vyučovania matematiky: učiteľ žiakom predkladá podľa možnosti presne sformulované matematické poznatky a ich zdôvodnenie. Žiaci si tieto poznatky osvojujú, a tým si osvojujú jazyk umožňujúci presný a kultivovaný spôsob rozprávania *o matematike*. V genetickom konštruktivizme je dynamika reformulácií zabudovaná do celkového sociálneho kontextu procesu poznávania. Keďže žiaci sú v rámci genetického konštruktivizmu vedení k tomu, aby matematické poznatky získané vlastnou aktivitou samostatne formulovali a tieto formulácie následne obhajovali pred spolužiakmi, automaticky sa naučia, že ten istý poznatok možno formulovať mnohými spôsobmi, ktoré sa líšia jasnosťou, presnosťou a zrozumiteľnosťou. Trieda v spoločnej diskusii vyberá najlepšiu formuláciu a tým sa žiaci učia formulácie porovnávať a kriticky hodnotiť.

Klasický opis takejto diskusie možno nájsť na stránkach slávnej knihy *Proofs and Refutations* Imre Lakatosa (1976). V nej je opísaná diskusia vedúca k objavu Eulerovej vety o mnohostenoch vo fiktívnej triede, v ktorej sa v detskom veku stretli poprední svetoví matematici, ktorí prispeli k rozvoju teórie mnohostenov, ako napríklad Cauchy, Legendre či Poincaré, a spolu diskutujú argumenty, ktoré v skutočnosti publikovali v zrelom veku vo svojich v prelomových prácach. Lakatos predčasne zomrel roku 1974 vo veku 52 rokov, ale Lakatosove myšlienky sú stále považované za významný prínos k didaktike matematiky (Reichel, 2002),

Ukázali sme (Kvasz, 2002), že Lakatos opisujúci techniky *monster barring* (odmietnutie protipríkladu k tvrdeniu dokazovanej vety ako „monštra“, spojené so snahou o reformuláciu definícií základných pojmov tak, aby protipríklad vylúčili), *exception barring* (uznanie legitímnosti protipríkladu spojené so snahou o jeho vylúčenie pomocou reformulácie samotnej vety) a *lemma incorporation* (prijatie protipríkladu spojené so snahou reformulovať pôvodné tvrdenie vety tak, aby sa protipríklad stal príkladom potvrdzujúcim tvrdenie vety) vytvoril detailnú a empiricky adekvátnu analýzu kognitívnej a epistemologickej úlohy re-formulácií v matematike. V ideálnom prípade je možné pokúsiť sa pri vyučovaní určitej časti matematiky napodobniť proces opísaný Lakatosom: nájsť relevantné príklady a protipríklady viet v danej oblasti a postupne ich predkladať žiakom k diskusii.

V rámci genetického konštruktivizmu sa učiteľ snaží viesť diskusiu v triede práve takýmto spôsobom, teda žiakov nepoučovať, ale zabezpečiť, aby námietky a protiargumenty vyslovené niektorým zo žiakov neostali nepovšimnuté (tým, že žiakovi ponúkne priestor u tabule, aby svoj argument predniesol pred celou triedou) a tiež aby argumenty neboli „prevalcované“ rétoricky silnejšími žiakmi (tým, že sa k argumentu vráti a vyzve aj ostatných, aby sa vyjadrili, či je argument presvedčivý). Naučiť žiakov viesť racionálnu diskusiu je jedným z hlavných cieľov genetického konštruktivizmu. Preto úlohou učiteľa je kognitívne ustúpiť do úzadia, nechať žiakov argumentovať a starať sa len o to, aby diskusia bola férová a aby ju neovládlo pár jedincov.

Na rozdiel od predchádzajúcich troch úrovní, empirické testovanie úrovne re-formulácií by sa nemalo orientovať na žiakovu schopnosť riešiť matematické úlohy, ale schopnosti vysvetliť vlastné matematické myšlienky a porozumieť myšlienkam iných. Schopnosť komunikovať matematické pojmy a myšlienky by mala byť signifikantne vyššia u žiakov, ktorí boli učení v rámci genetického konštruktivizmu. Je však otázne, ako takúto schopnosť empiricky merať. Možno mierou variability prístupov a príkladov, ktoré je žiak schopný použiť, keď mu experimentátor zadá úlohu vysvetliť nejaký pojem alebo poznatok spolužiakovi, pričom mu experimentátor viackrát povie, že nerozumie.

5 Didaktika matematiky ako argumentačná disciplína

Didaktika matematiky, podobne ako didaktiky mnohých iných predmetov, je poznačená určitým subjektivizmom. Tvorcovia študijných plánov, autori učebníc aj konkrétni učitelia volia niekedy to, čo sa bude učiť, podľa subjektívnych kritérií toho, čo považujú za dôležité, zaujímavé alebo užitočné. Žiakom potom neostáva iná možnosť ako sa začať učiť látku, ktorá je štádiu ich kognitívneho vývinu neadekvátna, ich mentálnemu svetu cudzia a z hľadiska ich budúcej orientácie irelevantná.[13] Prístup predložený v práci (Kvasz, 2020), ktorý sme tu aplikovali na analýzu genetického konštruktivizmu, ponúka rámec pre zdôvodnenie toho, prečo je určitá téma, metóda či prístup vhodný pre zahrnutie do vyučovacieho procesu – a naopak, prečo iná téma, metóda či prístup by mohla byť vynechaná.

Pri analýze genetického konštruktivizmu sme ukázali, že obsahuje didaktické metódy, ktoré umožňujú u žiaka zabezpečiť navodenie kognitívnych zmien všetkých štyroch druhov. Ako sme uviedli, pre každú z týchto didaktických metód je možné nájsť analogické metódy aj v iných prístupoch k didaktike matematiky. Je však dôležité, že genetický konštruktivizmus obsahuje metódy zamerané na zmeny *všetkých štyroch* druhov a tieto metódy organicky a premyslene spája do uceleného didaktického prístupu. V tom sa líši od iných prístupov k didaktike matematiky, ktoré sme v tejto stati spomenuli, či už ide o Hansa Freudenthala, Pierra van Hieleho, Ericha Wittmanna, Otta Toeplitza, Hansa Nielsa Jahnkeho, či Annu Sfard, ich prístupy sa v oblasti didaktiky matematiky zameriavajú na rozpracovanie určitej špecifickej metódy, vhodnej na navodenie kognitívnych zmien určitého druhu, ale ostatným druhom zmien nevenujú dostatočnú pozornosť.

Ako ilustráciu je možné vziať spomínanú Lakatosovu knihu, v ktorej autor geniálne prenikol do procesu a kognitívnej dynamiky re-formulácií, takže jeho prístup

[13] Aby nevzniklo nedorozumenie, nie som proti slobode učiteľov. Naopak, slobodu učiteľa pri formovaní vyučovacieho procesu považujem za dôležitý výdobytok. Rovnako si nemyslím, že o obsahu vyučovania by mali rozhodovať žiaci na základe svojich záľub a záujmov. Domnievam sa len, že voľby na strane edukátorov (od tvorcov rámcových plánov až po učiteľa) by mali byť zdôvodniteľné. Ide mi výlučne o zavedenie zdôvodňovania výberu obsahu a formy vyučovania v rámci didaktiky matematiky ako vedeckej disciplíny.

dôkazov a vyvrátení (*proofs and refutations* – ako sa nazýva jeho kniha) je bezpochyby inšpiratívny pre každého, kto chce začleniť re-formulácie do svojej edukačnej praxe. Ale súčasne je Lakatosova kniha pozoruhodná aj v tom, že najbližšiu väčšiu zmenu – v jeho prípade objektácie – ignoruje. V teórii mnohostenov, ktorej je venovaná Lakatosova kniha, došlo k významnej zmene spojenej so vznikom algebraickej topológie. Táto zmena posunula diskusiu o Eulerovej vete o mnohostenoch na úplne inú úroveň všeobecnosti. V Lakatosovej knihe sa táto zmena prejavila tým, že sa kniha rozpadla na dve časti (prvú na s. 1–108 a druhú na s. 112–134). V prvej časti sú diskutované re-formulácie, ku ktorým došlo predtým, ako Poincaré inicioval túto zmenu, v druhej sú diskutované re-formulácie, ku ktorým došlo po príslušnej objektácii. Ale uvedené dve časti Lakatosovej knihy sú oddelené. Lakatos prechod k druhej časti charakterizuje ako „translation of the conjecture into terms of vector algebra“, teda ako preklad domnienky do jazyka vektorovej algebry. Ale otázky, že odkiaľ sa jazyk vektorovej algebry nabral, prečo to je vektorová algebra modulo 2, a prečo je tento preklad tak efektívny, nepoložil.

Lakatosov príklad názorne ilustruje jav, ktorý je podľa nás v menej nápadnej podobe prítomný vo viacerých prístupoch k didaktike matematiky. Autor určitého prístupu vynikajúcim spôsobom zvláda navodenie kognitívnych zmien jedného druhu (v Lakatosovom prípade re-formulácií), ale zmeny ostatných troch druhov necháva bez povšimnutia. Pritom Lakatosov prípad je zaujímavý tým, že ku zmene, ktorej analýzu vynecháva (t. j. k objektácii), došlo priamo v materiáli, ktorý analyzuje. Preto uvedenú zmenu možno vidieť priamo na texte, ale len ako zlom, ako rozpadnutie sa Lakatosovej knihy na dve časti, ktorých súvis Lakatos nekomentuje.

Príklad autorov Rolanda Garciu a Jeana Piageta predstavuje ďalšiu ilustráciu javu, ktorý nás tu zaujíma. V knihe *Psychogenesis and the History of Science* (1989) opisujú kognitívny vývin tvorený trojicou štádií: štádiom *Intra*-figurálneho, *Inter*-figurálneho a *Trans*-figurálneho myslenia. Ich kniha je zaujímavá a obsahuje množstvo ilustrácií tohto vývinového procesu ako z psychogenézy, tak aj z dejín vedy. Ako ilustráciu z dejín geometrie udávajú Euklidove *Základy* ako štádium Intra, Descartovu *Geometriu* ako štádium Inter a Kleinov Erlangenský program ako štádium Trans. Podrobnejšia rekonštrukcia dejín geometrie však ukazuje, že Descartova analytická geometria a Kleinov Erlangenský program patria k odlišným druhom kognitívnej dynamiky. Prechod od Euklida k Descartovi je re-prezentácia (mení spôsob generovania geometrických objektov) a jeho ďalšou etapou je fraktálna geometria. Naproti tomu prechod od Euklida ku Kleinovi je objektácia, a medzi Euklidom a Kleinom leží rad ďalších objektácií ako napríklad objav projektívnej geometrie (Desargues) či objav neeuklidovských geometrií (Gauss, Bolyai a Lobačevskij), ktorých analýzu Garcia a Piaget vynechali (pozri Kvasz, 2008, s. 249–251).

Tu vidíme zaujímavý problém. Kým Lakatos precízne analyzuje dynamiku zmien jedného druhu a ignoruje zmeny ostatných druhov, Garcia a Piaget postupujú v istom zmysle opačným spôsobom. Berú zmeny rôznych druhov a spájajú ich do spoločnej schémy bez toho, aby si ich rozdielny charakter uvedomili. Podľa nás ako jeden, tak aj druhý postup znemožňujú vytvoriť účinný prístup k didaktike matematiky. Keď určité druhy zmien vynecháme, bude to v kognitívnom raste žiakov chýbať a žiaci nebudú schopní riešiť problémy, ktoré zmeny tohto druhu predpokladajú. Ak naopak zmiešame rôzne druhy zmien do jediného hypotetického procesu, strácame špecifiká každého z nich a tak nebudeme schopní kognitívne funkcie žiakov rozvíjať s dostatočnou účinnosťou.

Genetický konštruktivizmus obsahuje metódy na navodenie kognitívnych zmien všetkých štyroch druhov. Inštrumentálny realizmus, o ktorý naše rekonštrukcie opierame, vznikol v inom kontexte, než je didaktika matematiky (v kontexte Kuhnovej teórie vedeckých revolúcií) a v didaktike matematiky ho len aplikujeme. Domnievame sa, že klasifikácia štyroch druhov zmien jazyka matematiky je definitívna[14] – a tak umožňuje dospieť k hodnotiacim súdom.

Hodnotenie prístupov k didaktike matematiky možno založiť na nasledujúcich kritériách:

1. Či daný prístup umožňuje navodenie kognitívnych zmien všetkých štyroch druhov, alebo obsahuje metódy na navodenie zmien iba niektorých druhov, kým zmeny ostatných druhov ignoruje.
2. Či pri navodzovaní zmien určitého druhu daný prístup zohľadňuje v úplnosti kognitívnu dynamiku, ktorá je spojená s daným druhom zmien, alebo zohľadňuje iba niektoré z týchto zmien.
3. Či sú metódy umožňujúce navodenie jednotlivých druhov kognitívnych zmien organicky prepojené, alebo sa učivo rozpadá na vyučovanie jednotlivých partií bez ich kognitívneho prepojenia.

Tieto kritériá nechceme vnucovať ako jediné správne. Ponúkame ich skôr ako námet na diskusiu, ktorá by mohla pomôcť ujasniť si otázky typu, či a v akom rozsahu chceme zavádzať pojem funkcie, učiť riešiť kvadratické rovnice či matematickú štatistiku na strednej škole. Aby mohla takáto diskusia začať, bude potrebné preložiť uvedené otázky do jazyka kognitívnych zmien a ujasniť si, s akými ďalšími zmenami tá-ktorá zmena súvisí, ktoré zmeny predpokladá a aké následky bude mať jej zaradenie alebo vynechanie na celkový rozvoj kognície žiaka.

Poďakovanie

Stať je súčasťou projektu Progres Q17 *Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu*.

[14] Ako len môže byť definitívna vedecká klasifikácia – podľa Newtona „v experimentálnej filozofii musíme vety odvodené z javov všeobecnou indukciou pokladať napriek existencii odporujúcich hypotéz za pravdivé buď presne, alebo približne, pokiaľ sa nevyskytnú javy, vďaka ktorým sa buď ešte väčšmi upresnia, alebo budú podrobené výnimkám“ (Newton, 1687/2021, s. 295).

Literatúra

Cardano, G. (1545/1968). *Ars magna, or the rules of algebra*. MIT Press.

Derry, J. (2020). A problem for cognitive load theory – the distinctively human life-form. *Journal of Philosophy of Education, 54*(1), 5–22.

Diogenes Laertos. (okolo 300 n. l. /1954). *Životopisy slávnych filozofov*. Vydavateľstvo Slovenskej Akadémie Vied.

Euklides. (okolo 300 pred n. l./2011). Ukázky ze Základů I–IV: Planimetrie. In Z. Šír (Ed.), *Řecké matematické texty* (s. 110–185). Oikoymenh.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer.

Garcia, R., & Piaget, J. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press.

Glasersfeld, E. von. (1981). Einführung in den radikalen Konstruktivismus. In P. Watzlawick (Ed.), *Die erfundene Wirklichkeit* (s. 16–38). Piper.

Hejný, M. (2004). Mechnizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Pedagogická fakulta UK.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Pedagogická fakulta UK.

Hejný, M., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Hrdina, Ľ., Repáš, V., & Vantuch, J. (1988). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hejný, V., & Hejný, M. (1977/2012). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM*. In H. Bachratý, A. Bachratá, K. Bachratá, A. Belan, M. Benešová, V. Burjan, Ľ. Burjanová, K. Čárska, J. Fraasová, I. Hejný, M. Hejný, V. Hucíková, Š. Jány, E. Jányová, S. Kružliaková, A. Kuřík, L. Kvasz, M. Kvaszová, A. Mojžišová, D. Môťovská, & A. Sukniaková (Eds.), *Archív Víta Hejného* (sv. I, s. 33–74). EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity.

Hiele, P. van. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*, Academic Press.

Jahnke, H.-N. (2014). History in mathematics education. A hermeneutic approach. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics and mathematics education: Search for common ground* (s. 75–88). Springer.

Kampis, G., Kvasz, L., & Stöltzner, M. (Eds.). (2002). *Appraising Lakatos. Mathematics, methodology, and the man*. Kluwer.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75–86.

Kvasz, L. (2002). Lakatos' methodology between logic and dialectic. In G. Kampis, L. Kvasz, & M. Stöltzner (Eds.), *Appraising Lakatos. Mathematics, methodology, and the man* (s. 211–241). Kluwer.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of change. Linguistic innovations in the development of classical mathematics*. Birkhäuser.

Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis Scholae*, *10*(2), 15–45.

Kvasz, L. (2017). Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky. *Filosofický časopis*, *65*(4), 513–541.

Kvasz, L. (2020). Inštrumentálny realizmus ako možné východisko teoretickej reflexie vyučovania matematiky. *Orbis Scholae*, *14*(1), 7–32.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge UP.

Mach, E. (1883). *Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Historisch-Kritisch dargestellt*. F. A. Brockhaus.

Newton I. (1687/2021). *Matematické princípy prírodnej filozofie*. Spektrum, vydavateľstvo STU.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery*. John Wiley.

Proclus. (okolo 450/1992). *A commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press.

Reichel, H.-Ch. (2002). Lakatos and aspects of mathematics education. In G. Kampis, L. Kvasz, & M. Stöltzner (Eds.), *Appraising Lakatos. Mathematics, methodology, and the man* (s. 255–260). Kluwer.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Ernst Klett.

Semadeni. Z. (2018). Porównanie poziomów rozwoju poječ geometrycznych u uczniów Hejnego z poziomami van Hielów. *Journal of Modern Science*, *37*(2), 45–68.

Sfard, A. (1994). Reification and the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 44–55.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 191–228.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–397.

Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., & Knecht, P. (2017). *Transdisciplinární didaktika*. Masarykova univerzita.

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory.* Springer.

Šír, Z. (Ed.). (2011). *Řecké matematické texty*. Oikoymenh.

Toeplitz, O. (1926/2015). The problem of university courses on infinitesimal calculus and their demarcation from infinitesimal calculus in high school. *Science in Context*, *28*(2), 293–310.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode* [Vydal Dr. G. Koethe]. Springer Verlag.

Viète, F. (1591/1983). *Introduction to the analytical art*. The Kent State University Press.

van der Waerden, B. L. (1979). *Die Pythagoreer.* Artemis Verlag.

Vopěnka, P. (2003). *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Práh.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1–20.

Wittmann, E. (2021). *Connecting mathematics and mathematics education*. Springer.

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
Magdalény Rettigové 4, 116 39 Praha 1
ladislav.kvasz@pedf.cuni.cz